EJERCICIOS

ANÁLISIS II (POSGRADO)

Espacios Vectoriales normados

1.- Sea $(E, ||\cdot||_E)$ un espacio vectorial normado. Dado $\vec{x}_0 \in E$, la bola abierta con centro en $\vec{x}_0$ y radio $r > 0$ se denota por $B(\vec{x}_0, r)$. mientras que la bola cerrada con centro en $\vec{x}_0$ y radio $r > 0$ se denota por $B[\vec{x}_0, r]$.

a) Demuestre que $\overline{B(\vec{x}_0, r)} = B[\vec{x}_0, r]$, donde $\overline{S}$ denota la clausura de un conjunto $S \subset E$.

b) Demuestre que $\mathrm{Int}B[\vec{x}_0, r] = B(\vec{x}_0, r)$, donde $\mathrm{Int}S$ denota el interior de un conjunto $S \subset E$.

Comentario: Un error detectado en los últimos años consiste en creer que estas identidades son verdaderas para todo espacio métrico. Se pueden encontrar ejemplos (poco intuitivos) en los libros *Espacios Métricos* de Elon Lages Lima e *Introduction to Topology and Metric Spaces* de George Simmons.

2.- Dado un espacio vectorial normado $(E, ||\cdot||_E)$. Demuestre que todo subespacio vectorial $F \neq E$ tiene interior vacío.

3.- Demuestre que toda bola en un espacio vectorial normado $(E, ||\cdot||_E)$ es un conjunto convexo.

4.- Sea $(E, ||\cdot||_E)$ un espacio vectorial normado y $r > 0$.

a) Demuestre que $B(\vec{0}, r)$ y E son homeomorfos,

b) Deduzca que para todo $\vec{a} \in E$, $B(\vec{a}, r)$ es homeomorfo a E,

c) Deduzca que $U_r = \{\vec{x} \in E \colon ||\vec{x}||_E > r\}$ es homeomorfo a $E \setminus \{\vec{0}\}$.

5.- Sea E un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $||\cdot||_1$,$||\cdot||_2$ son dos normas equivalentes sobre E. Considere la función $\Phi \colon (E, ||\cdot||_1) \to (E, ||\cdot||_2)$ definida por

$$\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si} \quad \vec{x} = \vec{0} \\ \\ \frac{||\vec{x}||_1}{||\vec{x}||_2}\vec{x} & \text{si} \quad \vec{x} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

Demuestre que Φ es un isomorfismo. Si B_1 y B_2 son las respectivas bolas unitarias de $(E, ||\cdot||_1)$ y $(E, ||\cdot||_2)$, demuestre que B_1 y B_2 son isomorfas.

6.- Sea $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado cuya norma verifica la propiedad $||\vec{x} + \vec{y}|| = ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

Demuestre que para todo par $\alpha, \beta \geq 0$ se verifica

$$||\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}|| = \alpha||\vec{x}|| + \beta||\vec{y}||.$$

7.- Sea A un subconjunto de un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado $(E, ||\cdot||_E)$. Demuestre que A es totalmente acotado si y sólo si A es acotado y para todo $\varepsilon > 0$ existe un subespacio vectorial F_ε de dimensión finita tal que para todo $\vec{x} \in A$, su distancia al subespacio F_ε viene dada por $d(\vec{x}, F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Date: Agosto 2023.

Key words and phrases. Operadores lineales.

8.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de un espacio vectorial normado $(E, ||\cdot||_E)$. La suma de los conjuntos A y B se define como:

$$A + B := \{z = a + b \in E \colon a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}.$$

Demuestre que:

a) Si A es abierto en E, entonces $A + B$ es abierto,

b) Si A y B son compactos, entonces $A + B$ es compacto,

c) Si A es compacto y B es cerrado en E, entonces $A + B$ es cerrado en E,

d) Si A y B son cerrados en E, entonces $A + B$ no es necesariamente cerrado en E.

9.- Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y considere dos subconjuntos compactos no vacíos K y L. Demuestre que la unión de todas las rectas uniendo un vector de K con otro de L forman un conjunto compacto.

10.- Suponga que $(E, ||\cdot||)$ es un $\mathbb{R}-$e.v.n y que $C \subseteq E$ es un subconjunto convexo. Demuestre las siguientes propiedades:

(i) Pruebe que tanto $\overline{C}$ como $\text{Int}C$ son conjuntos convexos.

(ii) Dado $x \in C$ e $y \in \text{Int}C$, se tiene que $tx + (1-t)y \in \text{Int}C$ para todo $t \in]0, 1[$.

(iii) Si $\text{Int}C \neq \varnothing$, entonces, $\overline{C} = \overline{\text{Int}C}$.

11.- Considere el espacio de Banach $(\ell^2, ||\cdot||_2)$ de sucesiones reales de cuadrado sumable. Considere la serie $\sum_n a_n$, donde $a_0 = (1, 0, 0, \ldots)$, $a_1 = (0, \frac{1}{2}, \ldots)$ y en general:

$$a_n = (0, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots).$$

Demuestre que la serie es convergente pero no es absolutamente convergente.

12.- Considere el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $(\mathcal{P}([0,1], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ de funciones polinomiales $p \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ con la norma del supremo. Considere la serie $\sum P_n(x)$ donde

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Demuestre que la serie es absolutamente convergente pero no converge a un elemento de $\mathcal{P}$.

13.- Demuestre que el Lema de Riesz siempre es falso si suponemos $\theta > 1$.

14.- Sean $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ e Y un subconjunto propio de $\mathbb{R}^n$. Analice la relación entre el Lema de Riesz y la proyección ortogonal sobre el subespacio Y.

15.- Demuestre que si E es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita. Entonces, dadas dos normas cualesquiera $||\cdot||$ y $||\cdot||'$, entonces, existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1||x|| \leq ||x||' \leq C_2||x|| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Operadores lineales continuos

1.- Considere el $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado $(\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$, donde

$$\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada y continua}\} \quad \text{y} \quad ||f||_\infty = \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} |f(t)|.$$

Demuestre que $T\colon \mathcal{BC}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{BC}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definida por

$$(Tf)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)} f(s)\, ds \quad (\text{con } a > 0),$$

es una transformación lineal continua.

2.- Demuestre que $U\colon \mathcal{BC}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{BC}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definida por

$$(Tf)(t) = -\int_{t}^{+\infty} e^{a(t-s)} f(s)\, ds \quad (\text{con } a > 0),$$

es una transformación lineal continua.

3.- Sea $\mathbb{R}[x]$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales (y variable x) dotado de la norma $||p|| = \sup_{x\in[0,2]} |p(x)|$. Demuestre que la transformación lineal $T\colon (\mathbb{R}[x], ||\cdot||) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por $T(p) = p(2)$ no es continua en $0 \in \mathbb{R}[X]$ (el polinomio idénticamente nulo).

4.- Dados dos $\mathbb{R}-$espacios normados E y F, considere el siguiente conjunto:

$$\mathcal{L}(E,F) := \{\text{Transformaciones lineales continuas } T\colon E \to F\}.$$

Demuestre que $\mathcal{L}(E,F)$ es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial.

5.- Demuestre que $||T||$ define una norma sobre $\mathcal{L}(E,F)$.

6.- Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ entonces

$$||T\vec{x}||_F \leq ||T||\,||\vec{x}||_E \quad \text{para todo } \vec{x} \in E.$$

7.- Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$, demuestre que si $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión de vectores en E tal que $\lim_{n\to+\infty} \vec{x}_n = \vec{x} \in E$ entonces $\lim_{n\to+\infty} T(\vec{x}_n) = T(\vec{x})$.

8.- Demuestre que si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es un homeomorfismo, entonces existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$C_1||\vec{x}||_E \leq ||T(\vec{x})||_F \leq C_2||\vec{x}||_E \quad \text{para todo } \vec{x} \in E.$$

9.- Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Demuestre que el núcleo de T:

$$\mathcal{N}(T) := \{\vec{x} \in E\colon Tx = 0_F\}$$

es un subconjunto cerrado de F.

10.- Sean $T_1 \in \mathcal{L}(E,F)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(F,G)$. Demuestre que $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(E,G)$ y que $||T_2 \circ T_2|| \leq ||T_2||\,||T_1||$.

11.- Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Donde $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$ y $(\mathbb{R}^m, ||\cdot||_1)$. Demuestre que

$$||A|| = \max_{j=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right\}$$

12.- Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Donde $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ y $(\mathbb{R}^m, ||\cdot||_\infty)$. Demuestre que

$$||A|| = \max_{i=1,\ldots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

13.- Sean $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ dos espacios vectoriales normados y $T\colon E \to F$ una transformación lineal. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes:

i) T es un homeomorfismo,

ii) T es epiyectiva y existen dos constantes positivias α y β tales que para todo $\vec{x} \in E$ se verifican las desigualdades:

$$\alpha||\vec{x}||_E \leq ||T(\vec{x})||_F \leq \beta||\vec{x}||_E.$$

14.- Recordemos que dado un conjunto X y dos distancias d_1, d_2, estas son equivalentes si la función identidad $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es un homeomorfismo de espacios métricos. Use el ejercicio anterior para probar que si $|| \cdot ||$ y $|| \cdot ||'$ son dos normas en el $\mathbb{R}-$espacio vectorial E, entonces, estas son equivalentes (como metricas) si y sólo si existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1||x||' \leq ||x|| \leq C_2||x||' \quad \text{para todo } x \in E.$$

15.- Sea $(F, || \cdot ||_E)$ un $\mathbb{R}$–espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(F)$ tal que $||T|| < 1$.

a) Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(F)$, donde $T^0 = I$ (operador identidad) y

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ veces}}$$

b) Demuestre que $I - T$ es invertible y que

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Email address: `grobledo@uchile.cl`

Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 653, Santiago, Chile.