OPERADORES LINEALES CONTINUOS

ANÁLISIS II (POSGRADO)

1. Espacios vectoriales normados (algunos tópicos)

1.1. Series en espacios vectoriales normados.

Definición 1. *Sea $(E, ||\cdot||_E)$ un espacio vectorial normado. Una **serie** en E está constituida por una pareja sucesiones: $\{x_n\}_n \subset E$ y $\{S_n\}_n \subset E$ tales que*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*En ese contexto, se dice que x_n es el **término general de la serie**, mientras que S_n es la **suma parcial de la serie**.*

Para simplificar lan notación anterior resumieremos las pareja de sucesiones de la definición como $\sum x_n$.

Definición 2. *En el contexto de la definición anterior, se dice que la serie $\sum x_n$ es **convergente** si la la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_n$ es convergente en E. Es decir existe $S \in E$ tal que*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n > N \Rightarrow ||S_n - S||_E < \varepsilon.$$

El término S se denotará usualmente por $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ y se definirá

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Definición 3. *Sea $(E, ||\cdot||_E)$ un $\mathbb{K}$–espacio vectorial normado. Se dice que la serie $\sum x_n$ es **absolutamente convergente** si la serie de números positivos $\sum ||x_n||_E$ es convergente.*

Notemos que todos los criterios de convergencia absoluta que han estudiados en los cursos de cálculo, también serán útiles para determinar la convergencia absolutia para series en $\mathbb{R}$–espacios vectoriales normados.

El siguiente resultado proporciona una condición necesaria y suficiente para que un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$–espacio vectorial normado sea un espacio de Banach:

Teorema 1. *Sea $(E, ||\cdot||_E)$ un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) $(E, ||\cdot||_E)$ *un $\mathbb{R}$-espacio de Banach,*

Date: Agosto 2023.
Key words and phrases. Operadores lineales.

b) *Toda serie* $\sum x_n$ *absolutamente convergente también es convergente. En este caso, se verifica la desigualdad*

$$||\sum_{n=1}^{\infty} x_n||_E \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_E. \tag{1}$$

Demostración. Primero demostraremos la implicación $a) \Rightarrow b)$. Sea $\{x_n\}_n \subset E$ una sucesión tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||_E < +\infty$. Podemos aplicar el criterio de Cauchy y notar que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad p, q > N \Rightarrow \sum_{n=p+1}^{q} ||x_n||_E < \varepsilon.$$

Ahora consideremos las sumas parciales $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$ y notemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad q > p > N \Rightarrow ||S_p - S_q||_E \leq \sum_{n=p+1}^{q} ||x_n||_E < \varepsilon$$

y podemos concluir que $\{S_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy.

Ahora, como $(E, ||\cdot||_E)$ es un espacio de Banach sabemos que S_n es convergente, es decir. la serie $\sum x_n$ es convergente.

Por último, como para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad

$$||\sum_{k=1}^{n} x_k||_E \leq \sum_{k=1}^{n} ||x_k||_E \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_E,$$

finalmente, la desigualdad (1) se obtiene haciendo tender $n \to +\infty$ en el término de la izquierda.

Ahora demostraremos la implicación $b) \Rightarrow a)$. Consideremos cualquier sucesión de Cauchy $\{x_n\}_n$ en el espacio E. Tenemos que demostrar que esta sucesión es convergente.

Un resultado conocido en los cursos de espacios métricos señala que dada un sucesion de Cauchy $\{x_n\}_n$ en el espacio E y una sucesión estrictamente decreciente de números reales positivos ϕ_n, siempre existirá una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k \subset E$ tal que

$$||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}||_E < \phi_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, si consideramos $\phi_k = 2^{-k}$, existirá una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k \subset E$ tal que $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}||_E < 2^{-k}$ y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}||_E < +\infty.$$

Como esta serie es absolutamente convergente, sabemos (por hipótesis) que la serie es convergente, es decir,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

es convergente. Notemos que la suma parcial de esta serie es

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{j+1}} - x_{n_1}.$$

Como S_j es convergente se tiene que la subsucesión $\{x_{n_{j+1}}\}_j$ es convergente.

En resumen, $\{x_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en el espacio E y $\{x_{n_{j+1}}\}_j$ es una subsucesión convergente. Usando otro resultado clásico de espacios métricos [1], se concluye que $\{x_n\}_n$ es convergente, y por lo tanto $(E, ||\cdot||_E)$ es completo. □

En el resultado anterior, la hipótesis de que $(E, ||\cdot||_E)$ era un espacio de Banach jugó un papel clave. En la guía de ejercicios se podrán ver ejemplos de series absolutamente convergentes que no son convergentes.

Por último, pero no por esos menos importante, al igual que en el curso de cálculo, existen series convergentes que no son absolutamente convergentes. Un ejemplo interesante se podrá encontrar en la guía de ejercicios.

1.2. Espacios vectoriales de dimensión finita y compacidad. Comenzaremos con el siguiente lema

Lema 1. *Sea $(X, ||\cdot||)$ un $\mathbb{K}$–espacio vectorial normado (de dimensión finita o infinita) y sea $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de X. Entonces existe $c > 0$ fijo, tal que para todo vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ se tiene que:*

$$||\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n|| \geq c(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|) \tag{2}$$

Demostración. En primer lugar definamos $s = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$. Notemos que si $s = 0$, la desigualdad (2) es cierta para todo $c > 0$. Por otro lado, si $s > 0$, podemos ver que (2) es equivalente a

$$||\frac{\alpha_1}{s}\vec{x}_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{s}\vec{x}_n|| \geq c$$

Por lo tanto, podemos ver que (2) es cierta si existe $c > 0$ tal que la desigualdad

$$||\beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n\vec{x}_n|| \geq c \quad \text{es cierta para todo } (\beta_1, \ldots, \beta_n) \text{ tal que } \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1. \tag{3}$$

Ahora demostraremos que (3) es cierta por contradicción: para todo $c_m > 0$ tal que $\lim\limits_{m\to+\infty} c_m = 0$, existe un vector $(\beta_1^{(m)}, \ldots, \beta_n^{(m)})$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k^m| = 1$ y

$$||\beta_1^m\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n^m\vec{x}_n|| < c_m.$$

Definimos $y_m = \beta_1^m\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n^m\vec{x}_n$. Es claro que $\lim\limits_{m\to+\infty} ||y_m|| = 0$.

Por otro lado, notemos que $(\beta_1^{(m)}, \ldots, \beta_n^{(m)}) \subset \mathbb{R}^n$ es una sucesión es una sucesión en la bola cerrada unitaria, el cual es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. La compacidad de esta bola, implica la existencia de una subsucesión $\{(\beta_1^{(m_k)}, \ldots, \beta_n^{(m_k)})\}_k$, la cual verifica

$$\lim_{k\to+\infty} (\beta_1^{(m)}, \ldots, \beta_n^{(m)} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \quad \text{con} \quad |\beta_1| + \ldots + |\beta_n| = 1.$$

y también

$$||\beta_1^{m_k}\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n^{m_k}\vec{x}_n|| < c_{m_k}.$$

[1] Ver por ejemplo la Proposición de [4, Cap.7] donde se demuestra que si una sucesion de Cauchy tiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión es convergente.

Hacemos paso al límite en esta última desigualdad, obteniendo:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} \|\beta_1^{m_k}\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n^{m_k}\vec{x}_n\| &< \lim_{k\to\infty} c_{m_k} \\ \|\lim_{k\to+\infty} \beta_1^{m_k}\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n^{m_k}\vec{x}_n\| &\leq 0 \\ \|\beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n\vec{x}_n\| &\leq 0, \end{aligned}$$

Lo cual nos permite concluir que

$$\lim_{k\to+\infty} y_{m_k} = \beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n\vec{x}_n = 0.$$

Como $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ es un un conjunto linealmente independiente de X se tiene que

$$\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0 \quad \text{al tiempo que} \quad |\beta_1| + \ldots + |\beta_n| = 1,$$

con lo cual se obtiene una contradicción. □

Teorema 2. *Todo subespacio finito dimensional Y de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es completo. En particular, todo espacio finito dimensional es completo.*

Demostración. Supongamos que la dimensión de Y es n. Entonces, consideraremos una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ del subespacio Y. Ahora, si consideramos una sucesión de Cauchy $\{y_m\}_m \subset Y$ cualquiera, tenemos que demostrar que es convergente a un vector de Y.

Como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de Y, para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_n^m)$ tal que

$$y_m = \alpha_1^m e_1 + \ldots + \alpha_n^m e_n.$$

Recordemos que $\{y_m\}_m \subset Y$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, r > N \quad \Rightarrow \quad \|y_m - y_r\| < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, r > N \quad \Rightarrow \quad \|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^m - \alpha_j^r)e_j\| < \varepsilon.$$

Por el Lema anterior tenemos que existe $c > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^m - \alpha_j^r|\right) c \leq \|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^m - \alpha_j^r)e_j\|.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, r > N \;\Rightarrow\; \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^m - \alpha_j^r|\right) c < \varepsilon.$$

Entonces, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que la sucesión $\{\alpha_j^m\}_m \subset \mathbb{K}$ es de Cauchy. En efecto, para todo j fijo tenemos que

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, r > N \;\Rightarrow\; |\alpha_j^m - \alpha_j^r| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Sin embargo, como $\mathbb{K}$ es completo sabemos que

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_j^m = \alpha_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} y_m &= \lim_{m\to+\infty}(\alpha_1^m e_1+\ldots+\alpha_n^m e_n)\\ &= \lim_{m\to+\infty}\alpha_1^m e_1+\ldots+\lim_{m\to+\infty}\alpha_n^m e_n\\ &= \alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n\in Y,\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

Ahora veremos un resultado notable obtenido por Friges Riesz en 1918:

Lema 2. *Consideremos un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado $(X, ||\cdot||)$ de cualquier dimensión. Dados los subespacios $Y\subset Z\subseteq X$. Si Y es cerrado y además es un subespacio propio de Z, entonces:*
Para todo $\theta\in(0,1)$ existe $z\in Z$ tal que

$$||z||=1 \quad \text{y} \quad ||z-y||\geq\theta \quad \text{para todo } y\in Y.$$

Demostración. La demostración de este importante resultado se dividirá en varios pasos:
Paso 1: Preliminares. Como Y es cerrado en X se tiene que

$$Y=\overline{Y}:=\left\{x\in X\colon \inf_{y\in Y}||x-y||=0\right\}.$$

Como Y es un subconjunto propio de Z, se tiene que $Z\setminus Y\neq\varnothing$. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}z\in Z\setminus Y &\Rightarrow v\neq Y\\ &\Rightarrow v\neq\overline{Y}\\ &\Rightarrow \inf_{y\in Y}||v-y||>0,\end{aligned}$$

lo cual nos motiva a introducir la notación $a:=\inf_{y\in Y}||v-y||$.

Una consecuencia de la definición de ínfimo es la siguiente:

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists y_0\in Y \text{ tal que } a\leq||v-y_0||<a+\varepsilon,$$

lo cual implica

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists y_0\in Y \text{ tal que } a\leq||v-y_0||\leq a+\varepsilon. \tag{4}$$

Paso 2: Introducimos $\theta\in(0,1)$ fijo .
Dado $\theta\in(0,1)$ sabemos que $a>0$ permite definir

$$\varepsilon=a\left(\frac{1}{\theta}-1\right)>0.$$

Reemplazando este ε en (4) se tiene que

$$\exists y_0\in Y \text{ tal que } a\leq||v-y_0||\leq\frac{a}{\theta}. \tag{5}$$

Paso 3: Fin de la demostración.

Dado el vector $y_0 \in Y$ visto anteriormente, consideremos

$$z = c(v - y_0) \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{||v - y_0||}.$$

Es fácil ver que $||z|| = 1$ y que $z \in Z$. Notemos que la demostración termina si verficamos que $||z - y|| \geq \theta$ para todo $y \in Y$. Para ello, sea $y \in Y$ cualquiera, notemos que

$$\begin{aligned} ||z - y|| &= ||c(v - y_0) - y|| \\ &= ||c(v - y_0) - cc^{-1}y|| \\ &= |c|\,||v - (y_0 + c^{-1}y)||. \end{aligned}$$

Definamos $y_1 = y_0 + c^{-1}y \in Y$. Notemos que lo anterior implica que

$$||z - y|| = |c|||v - y_1|| \geq |c| \inf_{y \in Y} ||v - y|| = |c|a.$$

Recordando la definición de c, sabemos que

$$||z - y|| \geq \frac{a}{||v - y_0||}.$$

Finalmente, usando la desigualdad (5) se tiene que

$$||z - y|| \geq \frac{a}{||v - y_0||} \geq a\frac{\theta}{a} = \theta,$$

lo cual es válido para todo $y \in Y$, lo cual concluye la demostración.

□

El Lema de Riesz proporciona una herramienta clave para relacionar compacidad y dimension en $\mathbb{R}$–espacios vectoriales normados, el cual se conoce como Teorema de Riesz:

Teorema 3 (Riesz)**.** *Si un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado tiene la propiedad de que la bola cerrada de radio uno:*

$$B[\vec{0}, 1] =: \{\vec{x} \in X : ||\vec{x}|| \leq 1\}$$

es un conjunto compacto, entonces X es finito dimensional.

Demostración. La demostración sea realizará por contradicción, es decir, supondremos que la bola unitaria cerrada es compactoa pero que X no es de dimensión finita.

Consideremos un vector no nulo $x_1 \in X$ tal que $||x_1|| = 1$. Definiremos por $X_1 = \langle x_1 \rangle$ al subespacio generado por x_1. Como X_1 es finito dimensional (pues X es de dimensión infinita), el Teorema 2 implica que X_1 es cerrado en X. Por otro lado, como X_1 es un subconjunto propio de X, podemos aplicar el Lema de Riesz (notemos que $X = Z$ e $Y = X_1$).

Por lo tanto, dado $\theta = \frac{1}{2}$, existe $x_2 \in X$ tal que $||x_2|| = 1$ y $||x_2 - x|| > \frac{1}{2}$ para todo $x \in X_1$. En particular, se tiene que

$$||x_1 - x_2|| \geq \frac{1}{2}.$$

Ahora definiremos por $X_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ al subespacio generado por x_1 y x_2. Como X_2 también es finito dimensional, el Teorema 2 implica que X_2 es cerrado en X. Por otro lado, como X_2 es un subconjunto propio de X (supoemos que X es de dimensión infinita), podemos aplicar el Lema de Riesz (notemos que $X = Z$ e $Y = X_2$).

Por lo tanto, dado $\theta = \frac{1}{2}$, existe $x_3 \in X$ tal que $||x_3|| = 1$ y $||x_3 - x|| > \frac{1}{2}$ para todo $x \in X_2$. En particular, se tiene que

$$||x_3 - x_2|| \geq \frac{1}{2}, \quad ||x_3 - x_1|| \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad ||x_1 - x_2|| \geq \frac{1}{2}.$$

De esta manera, podremos proseguir recursivamente, lo cual permitirá construir una sucesión de vectores $\{x_n\}_n$ tal que

$$(6) \qquad ||x_n|| = 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad y \quad ||x_n - x_m|| \geq \frac{1}{2} \quad \text{para todo } n \neq m.$$

Como $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola unitara cerrada y estamos suponiendo que es un conjunto compacto, podemos deducir la existencia de una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ y por lo tanto de Cauchy. Por lo tanto dado $\varepsilon < \frac{1}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \Rightarrow \frac{1}{2} \leq ||x_{n_k} - x_{m_k}|| < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

obteniendo una contradicción con (6). $\square$

2. Operadores lineales continuos (Preliminares)

Consideremos dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales normados $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$ y notemos lo siguiente:

- Como su nombre lo dice, E y F tienen una estructura algebraica precisa, a saber, la estructura de $\mathbb{K}$–espacio vectorial,
- Las normas respectivas proporcionan a los espacios vectoriales de una distancia, y por lo tanto los dota de una estructura topológica, a saber la de espacio vectorial normado, el cual es un caso particular (pero muy destacado) de espacio métrico.

En general, supondremos que el cuerpo $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. La definición de transformación lineal u operador lineal $T\colon E \mapsto F$ es conocida desde el curso de álgebra lineal. Una pregunta interesante y que articula las estructuras algebraica y topológica mencionadas anteriormente es la siguiente

¿ Cuándo un operador lineal $T\colon (E, ||\cdot||_E) \to (F, ||\cdot||_F)$ es continuo?

Comenzamos recordando un resultado conocido del curso de cálculo en varias variables [4, Cap.2 Sec. 5]:

Proposición 1. *Dados los $\mathbb{R}$–espacios vectoriales normados $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ y $(F, ||\cdot||_F)$, toda transformación lineal $T\colon (\mathbb{R}^n, ||\cdot||) \to (F, ||\cdot||_F)$, es continua*

Demostración. Sea $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces, toda transformación lineal tiene la representación

$$T(\vec{x}) = T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 T(\vec{e}_1) + \ldots + x_n T(\vec{e}_n).$$

Por lo tanto

$$||T(\vec{x})||_F \leq \underbrace{\text{máx}\{||T(\vec{e}_1)||_F, \ldots, ||T(\vec{e}_n)||_F\}}_{=C}(|x_1| + \cdots + |x_n|)$$

y tenemos que

$$||T(\vec{x})||_F \leq C||\vec{x}||_1.$$

Luego, por linealidad, se tiene que

$$||T(\vec{x})-T(\vec{y})||_F \leq C||\vec{x}-\vec{y}||_1.$$

y concluímos que $T\colon (\mathbb{R}^n,||\cdot||_1)\to (F,||\cdot||_F)$ es lipschitziana y por lo tanto continua.

Finalmente. consideremos cualquier norma $||\cdot||$ en $\mathbb{R}^n$. Como las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, existe $K>0$ tal que $||\vec{x}||_1\leq K||\vec{x}||$ y por lo tanto

$$||T(\vec{x})-T(\vec{y})||_F \leq KC||\vec{x}-\vec{y}||,$$

y asi se verifica la continuidad de $T\colon (\mathbb{R}^n,||\cdot||)\to (F,||\cdot||_F)$. En efecto, notemos que

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{KC}>0 \quad \text{tal que} \quad ||\vec{x}-\vec{y}||<\delta \Rightarrow ||T(\vec{x})-T(\vec{y})||_F<\varepsilon.$$

□

Una lectura atenta de la demostración nos muestra que T tiene propiedades mas fuertes que la continuidad: es Lipschtziana y por lo tanto uniformemente continua.

Igualmente, una lectura cuidadosa de la demostración nos muestra que el caracter finito dimensional del dominio jugó un papel crucial en la demostración. En general, si consideramos espacios vectoriales de dimensión infinita, no toda transformación lineal es continua. El siguiente resultado nos proporciona una condición necesaria y suficiente [4, Prop. 8, Cap 2]:

Proposición 2. *Dados los $\mathbb{R}$–espacios vectoriales normados $(E,||\cdot||_E)$, $(F,||\cdot||_F)$ y la transformación lineal $T\colon E\to F$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *T es continua en E,*
ii) *T es continua en 0_E,*
iii) *Existe un número real $M>0$ tal que*

$$||T(x)||_F\leq M||x||_E \quad \text{para todo } x\in E, \tag{7}$$

iv) *T es uniformemente continua.*

Demostración. La implicación $i)\Rightarrow ii)$ es directa pues si T es continua en E, es continua en todo vector, en particular lo será en 0_E.

Demostraremos que $ii)\Rightarrow iii)$: Si T es continua en 0_E. Usando la definición clásica de continuidad y recordando que $T(0_E)=0_F$ se tiene que

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0 \quad \text{tal que} \quad ||x||_E<\delta\Rightarrow ||T(x)||_F<\varepsilon.$$

Si consideramos $\varepsilon=1$, la propiedad precedente se puede escribir como

$$\exists\delta_1>0 \quad \text{tal que} \quad ||x||_E<\delta_1\Rightarrow ||T(x)||_F<1. \tag{8}$$

Luego, consideraremos $x\in E\setminus\{0_E\}$. Notemos que

$$z=\frac{\delta_1}{2}\frac{x}{||x||_E} \quad \text{verifica} \quad ||z||_E=\frac{\delta_1}{2}<\delta_1,$$

entonces una consecuencia directa de (8) es

$$||T(z)||_E<1 \iff \left|\left|T\left(\frac{\delta_1}{2}\frac{x}{||x||_E}\right)\right|\right|<1 \iff ||T(x)||_E<\frac{2}{\delta_1}||x||_E \quad (\forall x\neq 0_E).$$

Notemos que la última desigualdad se transforma en una igualdad si consideramos $x=0_E$. De esta forma, se obtiene la desigualdad (7) con $M=\frac{2}{\delta_1}$.

Demostraremos que $iii) \Rightarrow iv)$: Usando la linealidad de T y la desigualdad (7) se tiene que

$$||T(x) - T(x_0)||_F = ||T(x - x_0)||_F \leq M||x - x_0||_E \tag{9}$$

y, de esta manera, se verifica que

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad ||x - x_0||_E < \delta = \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow ||T(x) - T(x_0)||_F < \varepsilon,$$

obteniéndose la continuidad uniforme

Finalmente, como la continuidad uniforme es una propiedad mas general que la continuidad, se tiene que $iv) \Rightarrow i)$, lo cual concluye la demostración.

□

Observación 1. *Notemos que la ecuación (9) nos proporciona una consecuencia directa del resultado anterior: una transformación lineal $T\colon E \to F$ es continua si y sólo si T es Lipschitziana.*

Observación 2. *Asismismo, la propiedad de las transformaciones lineales continuas descrita por la desigualdad (9), motiva llamarlas* ***transformaciones lineales acotadas*** *u* ***operadores lineales acotados****. Esto puede generar cierta confusión pues la imagen de un operador lineal acotado no es un subconjunto acotado de F. Sin embargo, el origen de adjetivo* ***acotado*** *se debe a que la imagen de todo subconjunto acotado de E es un subconjunto acotado de F.*

La Proposición anterior también nos proporciona un criterio sencillo para detectar si una transformación lineal es discontinua. Por ejemplo consideremos el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios con coeficientes reales (y variable x), dotado de la norma

$$||p|| = \sup_{x \in [0,1]} |p(x)|$$

y la transformación lineal

$$\begin{aligned} T \quad : \quad & \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \\ & p \mapsto p', \end{aligned}$$

donde p' es la derivada del polinomio p. Notemos que esta transformación lineal no es continua. Si lo fuese, para todo polinomio p existiría una constante M independiente del polinomio tal que

$$\sup_{x \in [0,1]} |p'(x)| \leq M \sup_{x \in [0,1]} |p(x)|.$$

Ahora, si consideramos la familia de polinomios $p_n(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$, la desigualdad anterior podrá escribirse como

$$\sup_{x \in [0,1]} |nx^{n-1}| \leq M \sup_{x \in [0,1]} |x^n| \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

la cual es equivalente a

$$n \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

obteniendo una contradicción.

3. El espacio $\mathcal{L}(E,F)$

A continuación, introduciremos la siguiente notación:

$$\mathcal{L}(E,F) := \{\text{operadores lineales acotados } T\colon E \to F\}, \tag{10}$$

donde E y F son $\mathbb{R}$–espacios vectoriales normados. Por otro lado, en el caso de que $E = F$, por un tema de tradición (aunque no todas las tradiciones son buenas) se usa la siguiente notación:

$$\mathcal{L}(E) := \{\text{operadores lineales acotados } T\colon E \to E\}, \tag{11}$$

Se puede demostrar que $\mathcal{L}(E,F)$ es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial:

Proposición 3. $(\mathcal{L}(E,F), ||\cdot||)$ *es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado.*

Demostración. Se deja como ejercicio (ver guía de ejercicios). □

Como $\mathcal{L}(E,F)$ es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial, será interesante dotarlo de una norma. En ese contexto, dada $T \in \mathcal{L}(E,F)$, la Proposición 2 implica la existencia (pero no la unicidad) de una constante $M > 0$ que verifica la desigualdad (7). Es decir, podemos considerar el conjunto

$$A(T) : \{M > 0\colon ||T(x)||_F \leq M||x||_E\} \subset \mathbb{R}.$$

Notemos que $A(T)$ es no vacío debido a la continuidad de T y es acotado inferiormente por 0. Por lo tanto, usando el Axioma del supremo, podemos definir

$$||T|| := \text{ínf}\,\{M > 0\colon ||T(x)||_F \leq M||x||_E\} = \text{ínf}\ A(T). \tag{12}$$

Usando una caracterización del ínfimo[2], también tenemos que

$$||T|| = \text{ínf}\ A(T) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M_\varepsilon \in A(T) \quad \text{tal que} \quad ||T|| < M_\varepsilon < ||T|| + \varepsilon. \tag{13}$$

Proposición 4. *La expresión definida en (12) verifica la identidad*

$$||T|| = \sup_{||x||_E \leq 1} ||T(\vec{x})||_F. \tag{14}$$

Además, la función $T \mapsto ||T||$ es una norma en $\mathcal{L}(E,F)$.

Demostración. Consideremos $M_\varepsilon \in A(T)$ de la identidad (13), es decir

$$||T\vec{x}||_F \leq M_\varepsilon ||\vec{x}||_E.$$

Ahora, si consideramos $||\vec{x}||_E \leq 1$ una consecuencia de (13) será:

$$\begin{array}{lcl} ||T\vec{x}||_T & \leq & M_\varepsilon \\ ||T\vec{x}||_T & < & ||T|| + \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0, \end{array}$$

entonces

$$\sup_{||\vec{x}||_E \leq 1} ||T\vec{x}||_F < ||T|| + \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

lo cual es equivalente a

$$\sup_{||\vec{x}||_E \leq 1} ||T\vec{x}||_F \leq ||T||.$$

Notemos que si $||T|| = 0$, la igualdad (14) es una consecuencia inmediata de la desigualdad precedente. Ahora, si $||T|| > 0$, notemos que

$$\forall\, \beta \in (0, ||T||) \quad \exists\, \vec{x}_0 \in E \quad \text{tal que } ||T\vec{x}_0||_F > \beta||\vec{x}_0||_E. \tag{15}$$

[2]Si $\ell = \text{ínf}\ A$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < \ell + \varepsilon$. Ver [3, p.172]

En efecto, si (15) no fuese cierta, se tendría que

$$\exists\, \beta \in (0, ||T||) \quad \text{tal que } ||T\vec{x}||_F \leq \beta ||\vec{x}||_E \text{ para todo } \vec{x} \in E,$$

es decir $\beta \in A(T)$ con $\beta < ||T|| = \text{ínf } A(T)$, obteniendo una contradicción.

Consideremos una sucesión $\{\phi_n\}_n \subset \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \phi_n < ||T|| \quad \text{y} \quad \lim_{n \to +\infty} \phi_n = 0.$$

Si definimos $\beta_n = ||T|| - \phi_n$, la propiedad (15) implica la existencia de una sucesión $\{\vec{x}_n\}_n \subset E$ tal que

$$||T\vec{x}_n||_F \geq \beta_n ||\vec{x}_n||_E \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir

$$\sup_{||\vec{x}||_E \leq 1} ||T\vec{x}||_F \geq ||T(\frac{\vec{x}_n}{||\vec{x}_n||_E})||_F \geq \beta_n = ||T|| - \phi_n,$$

lo cual implica

$$\sup_{||\vec{x}||_E \leq 1} ||T\vec{x}||_F \geq \beta_n = ||T|| - \phi_n,$$

y haciendo $n \to \infty$ se tiene

$$\sup_{||\vec{x}||_E \leq 1} ||T\vec{x}||_F \geq \beta_n = ||T||,$$

lo cual concluye la demostración de la identidad (14). Finalmente, la verificación de que $||\cdot||$ define una norma sobre el espacio vectorial $\mathcal{L}(E, F)$ se deja como ejercicio (ver guía). □

Observación 3. *Otras propiedades básicas que están en la guía de ejercicios son las siguientes:*

i) *Si* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *entonces*

$$||T\vec{x}||_F \leq ||T||\, ||\vec{x}||_E \quad \text{para todo } \vec{x} \in E.$$

ii) *Si* $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ *y* $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$. *Entonces*

$$T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(E, G) \quad \text{y} \quad ||T_2 \circ T_2|| \leq ||T_2||\, ||T_1||.$$

Un caso importante viene dado cuando $(F, ||\cdot||_F)$ es un espacio de Banach, lo veremos a continuación:

Teorema 4. *Si* $(F, ||\cdot||_F)$ *es un espacio de Banach, entonces* $(\mathcal{L}(E, F), ||\cdot||)$ *también es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$. Es decir

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m > N \Rightarrow ||T_n - T_m|| < \varepsilon,$$

lo cual es equivalente a

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m > N \Rightarrow \sup_{||\vec{x}||_E \leq 1} ||T_n\vec{x} - T_m\vec{x}||_F < \varepsilon.$$

Nuestro objetivo es demostrar que esta sucesión de Cauchy es convergente a algúna transformación $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Para ello, consideremos a un vector $\vec{x} \in \overline{B(\vec{0}_E; 1)}$ fijo. La propiedad anterior implica que:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m > N \Rightarrow ||T_n(\vec{x}) - T_m\vec{x}||_F < \varepsilon,$$

es decir, $\{T_n\vec{x}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ es una sucesión de Cauchy en F. Como $(F, ||\cdot||_F)$ es completo, se tiene que para todo r $\vec{x} \in \overline{B(\vec{0}_E; 1)}$, el límite $\lim_{n\to+\infty} T_n\vec{x}$ existe.

En particular, si $\vec{x} = \vec{0}_E$, se tiene que $T_n\vec{0}_E = \vec{0}_F$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y existe el límite $\lim_{n\to+\infty} T_n\vec{0}_E = \vec{0}_F$.

Ahora, para todo $\vec{x} \neq \vec{0}_E$ fijo, se tiene que

$$T_n(\vec{x}) = T_n\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}||\vec{x}||\right) = ||\vec{x}||T_n\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)$$

y la existencia de

$$\lim_{n\to+\infty} T_n\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)$$

verificada un poco mas arriba, implica la existencia de $\lim_{n\to+\infty} T(\vec{x})$.

Ahora definimos la función

$$\begin{aligned} T \quad : \quad & E \to F \\ & x \mapsto T(\vec{x}) = \lim_{n\to+\infty} T_n(\vec{x}). \end{aligned}$$

En primer lugar, verificaremos que es lineal. En efecto, veamos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||T(\lambda\vec{x}) - \lambda T(\vec{x})|| &= ||T(\lambda\vec{x}) - T_n(\lambda\vec{x}) + T_n(\lambda\vec{x}) - \lambda T(\vec{x})|| \\ &= ||T(\lambda\vec{x}) - T_n(\lambda\vec{x}) + \lambda T_n(\vec{x}) - \lambda T(\vec{x})|| \\ &\leq ||T(\lambda\vec{x}) - T_n(\lambda\vec{x})|| + |\lambda|\, ||T_n(\vec{x}) - T(\vec{x})||, \end{aligned}$$

si hacemos $n \to +\infty$ se tiene que

$$||T(\lambda\vec{x}) - \lambda T(\vec{x})|| = 0 \Rightarrow T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$$

y la igualdad $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ se puede demostrar de manera similar.

Finalmente, demostraremos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Como $\{T_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$, sabemos que dado $\varepsilon = 1$ se tiene que

$$\exists\ N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m > N_1 \Rightarrow ||T_n - T_m|| < 1.$$

Entonces, si definimos

$$M_0 = \text{máx}\{||T_1||, ||T_2||, \ldots, ||T_{N_1}|, ||T_{N_1+1}||\}$$

se tiene que

$$n > N_1 \Rightarrow ||T_n|| = ||T_n - T_{N_1+1} + T_{N_1+1}|| \leq ||T_n - T_{N_1+1}|| + ||T_{N_1+1}|| \leq 1 + M_0$$

y asi se concluye que

$$||T_n|| \leq M_1 = 1 + M_0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que si $||\vec{x}||_E \leq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||T(\vec{x})||_F &= ||T(\vec{x}) - T_n(\vec{x}) + T_n(\vec{x})||_F \\ &\leq ||T(\vec{x}) - T_n(\vec{x})||_F + ||T_n(\vec{x})||_F \\ &\leq ||T(\vec{x}) - T_n(\vec{x})||_F + ||T_n||\,||\vec{x}||_E \\ &\leq ||T(\vec{x}) - T_n(\vec{x})||_F + M_1. \end{aligned}$$

Si consideramos $n > N_1$ se tendrá que

$$||T\vec{x}||_F \leq 1 + M_1 \quad \text{para todo } ||\vec{x}||_E \leq 1,$$

y por lo tanto

$$\sup_{||\vec{x}||_E \leq 1} ||T\vec{x}||_F \leq 1 + M_1,$$

lo cual implica que $||T\vec{x}||_F \leq (1 + M_1)||\vec{x}||_E$ para todo $\vec{x} \in E$ y se concluye que $T \in \mathcal{L}(E, F)$. □

4. Dual Topológico

Cuando E es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, sabemos que a las transformaciones lineales $T\colon E \to \mathbb{K}$ se las denomina **formas lineales**. Cuando estas son continuas, es decir, cuando $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, introduciremos la notación

$$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

y diremos que E' es el *dual topológico* de E. Por otro lado, todas las funciones $f \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ serán denominadas como *funcionales lineales continuas*.

Ahora bien, consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dados $f \in E'$ y $x \in E$, se escribe por tradición:

$$f(x) = \langle f, x \rangle,$$

además la norma dual se define como:

$$||f||_{E'} = \sup_{x \in E, ||x|| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in E, ||x|| \leq 1} f(x) = \sup_{x \in E, ||x|| \leq 1} \langle f, x \rangle.$$

Una consecuencia directa del Teorema 4 es la siguiente:

Corolario 1. *Si $(E, ||\cdot||)$ es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado, entonces $(E', ||\cdot||_{E'})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Notemos que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach y $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Por lo tanto, el resultado es consecuencia del Teorema 4. □

Ahora consideraremos la siguiente definición:

Definición 4. *Sea E un $\mathbb{R}$–espacio vectorial. Se dice que el subconjunto $H \subset E$ es un* hiperplano *si existen una constante $c \in \mathbb{R}$ y una forma lineal $h\colon E \to \mathbb{R}$ tales que*

$$H = h^{-1}(c) = \{\vec{x} \in E \colon h(x) = c\}.$$

Notemos que la forma lineal $h\colon E \to \mathbb{R}$ enunciada en la definición de hiperplano no es necesariamente continua. Si bien ya conocemos una definición general de operador lineal continuo, veremos que para el caso de las formas lineales $h\colon E \to \mathbb{R}$ podemos tener una caracterización adicional:

Lema 3. *Si $(E, ||\cdot||_E)$ es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado y $h\colon E \to \mathbb{R}$ es una forma lineal no nula. Se tiene que el hiperplano $H = h^{-1}(c)$ es cerrado si y sólo si h es un operador lineal continuo ($h \in E'$).*

Demostración. $\Leftarrow$) Si suponemos que h es continuo, como $\{c\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ se tiene que $h^{-1}(c)$ es un subconjunto cerrado de E.

($\Rightarrow$ Si suponemos que $H = h^{-1}(c)$ es un subconjunto cerrado en E, se tiene que $H^c = E \setminus H$ es abierto en E.

En primer lugar, veremos que $H^c \neq \varnothing$. En efecto, si $H^c = \varnothing$, se tendría que

$$h(\vec{x}) = c \quad \text{para todo } \vec{x} \in E,$$

en particular, si consideramos $\vec{x} = \vec{0}$ se tendrá que $h(\vec{0}) = c = 0$ y por lo tanto se tendría que h es una forma lineal nula, lo cual contradice una hipótesis del enunciado.

Ahora, sea $\vec{x}_0 \in E \setminus H$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $h(\vec{x}_0) < c$. Como ya sabemos que $E \setminus H$ es un conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(\vec{x}_0, r) \subset E \setminus H.$$

Ahora demostraremos que

$$h(\vec{x}) < c \quad \text{para todo } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, r). \tag{16}$$

La verificación de esta propiedad se realizará por contradicción. Para ello, supondremos la existencia de $\vec{x}_1 \in B(\vec{x}_0, r)$ tal que $h(\vec{x}_1) > c$.

Usando el hecho de que las bolas son un conjunto convexo, se tiene que

$$\vec{x}_t = (1-t)\vec{x}_0 + t\vec{x}_1 \in B(\vec{x}_0, r) \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Por otro lado, notemos que

$$B(\vec{x}_0, r) \subset E \setminus H \Rightarrow h(\vec{x}_t) \neq c.$$

Sin embargo, se puede observar que para el valor

$$t = \frac{c - h(\vec{x_0})}{h(\vec{x}_1) - h(\vec{x}_0)} \in [0,1]$$

se tiene que $h(\vec{x}_t) = c$, obteniendo una contradicción y, por lo tanto, se verifica la propiedad (16).

La propiedad (16) se puede reescribir como

$$h(\vec{x}_0 + \vec{z}r) < c \quad \text{para todo } \vec{z} \in B(\vec{0}, 1), \tag{17}$$

la cual a su vez implica que

$$|h(\vec{z})| < r^{-1}(c - h(\vec{x}_0)) \quad \text{para todo } \vec{z} \in B(\vec{0}, 1).$$

Sea $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Si consideramos $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño y definimos

$$\vec{z} = (1-\varepsilon)\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||_E}.$$

Como $||z||_E < 1$ se tiene que

$$|h(z)| < r^{-1}(c - h(\vec{x}_0)) \iff |h(\vec{x})| < \frac{r^{-1}}{(1-\varepsilon)}(c - h(\vec{x}_0))||\vec{x}||_E$$

y haciendo tender $\varepsilon \to 0$ se tiene finalmente que

$$|h(\vec{x})| \leq r^{-1}(c - h(\vec{x}_0))||\vec{x}||_E \quad \text{para todo } \vec{x} \in E,$$

y así se verifica la linealidad de h.

$\square$

Notemos que el resultado anterior asumía la existencia de una forma lineal $h\colon E \to \mathbb{R}$ no nula. En ese contexto, una pregunta fácil de formular, pero difícil de demostrar, es la siguiente:

¿Existe algun elemento no nulo del dual E'?

Si intentamos responder esa pregunta y consideramos un elemento arbitrario $x_0 \in E$ distinto del origen, podemos definir el subespacio unidimensional E_0:

$$E_0 := \{\alpha x_0 \colon \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Por otro lado, también definamos el funcional

$$g\colon \begin{array}{ccc} E_0 & \to & \mathbb{R} \\ \alpha x_0 & \to & g(\alpha x_0) = \alpha, \end{array}$$

el cual claramente es lineal. Además, si consideramos $x = \alpha x_0$ tendremos

$$|g(x)| = |\alpha| = \frac{|\alpha|||x_0||}{||x_0||} = \frac{1}{||x_0||}||x||$$

y verificamos las siguientes propiedades para g:

- $g \in \mathcal{L}(E_0, \mathbb{R})$,
- $||g||_{E_0'} = \sup\limits_{||x|| \leq 1} g(x) = \frac{1}{||x_0||}$,
- $g(x) \leq p(x)$ con $p(x) = \frac{1}{||x_0||}||x||$.

Si logramos demostrar que el funcional g construído en los párrafos precedentes se puede *extender* a todo el espacio E, es decir, demostrar la existencia de un funcional $f \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ que verifique $g(x) = f(x)$ para todo $x \in E_0$, habremos respondido afirmativamente la pregunta. Esa demostración es sutil y la veremos más adelante como una consecuencia del Teorema de extensión Hahn–Banach.

Referencias

[1] B. Ba, G. Vinel, Géometrie Differentielle, Masson, Paris, 1994.
[2] H. Brézis. Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications. Dunid, Paris, 1999.
[3] J. Kitchen, Calculus, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1968.
[4] E.L. Lima. Espaços Métricos, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 5a edición, 2017.

E-mail address: grobledo@uchile.cl

Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 653, Santiago, Chile.