AYUDANTÍA XXII

20 de Noviembre, 2023

Ejercicios.

- I. Sea V un Espacio Vectorial, sea $A \subset V$ tal que $\langle A \rangle = V$. Probar que A es base de V si, y solamente si A es un conjunto generador minimal de V .
- II. Definimos $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ por:
- $$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_3 - x_2, x_1 - 2x_2)$$
- a) Calcule $T(1, -2, 3)$.
- b) Encuentre $x = (x_1, x_2, x_3)$ tal que $T(x) = (8, 9, -5, 0)$.
- c) Demuestre que es una Transformación Lineal.
- III. Sea $T : V \rightarrow W$ una Transformación Lineal, sea N un Subespacio Vectorial de W . Se define $T^{-1}(N) = \{v \in V : T(v) \in N\}$. Demuestre que $T^{-1}(N)$ es un Subespacio de V .
- IV. Pruebe que:
- a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Transformación Lineal, no puede ser inyectiva.
- b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Transformación Lineal, no puede ser epiyectiva.
- c) Generalice estas nociones.
- V. Sea $T : V \rightarrow W$ una Transformación Lineal inyectiva, sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ Linealmente Independiente. Demuestre que $\{T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)\}$ es Linealmente Independiente en W .

AYUDANTÍA XXIII

21 de Noviembre, 2023

Ejercicios.

- I. Demuestre que $T : V \rightarrow W$ Transformación Lineal es inyectiva si, y sólo si su kernel es trivial, es decir, $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.
- II. Sean V y W Espacios Vectoriales. Demuestre que $\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ es una Transformación Lineal}\}$ es un Espacio Vectorial con las operaciones de suma y multiplicación por escalar de funciones.
- III. La meta de este ejercicio es entender las nociones de cuando una Transformación Lineal es invertible. Sea $T : V \rightarrow W$ Transformación Lineal, se dice que T tiene inversa por la derecha si existe $R : W \rightarrow V$ tal que $T \circ R = id_V$. Por otra parte, se dice que T tiene inversa por la izquierda si existe $L : W \rightarrow V$ tal que $L \circ T = id_W$.
 - a) Si T tiene inversa por la derecha, ¿tiene T inversa por la izquierda?
 - b) Si T tiene tanto inversa por la derecha como por la izquierda, ¿son necesariamente iguales?
 - c) ¿Qué relación existe entre que T sea biyectiva y que sea invertible?
 - d) Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ generador de V . Si $\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\}$ es base de W , ¿qué se puede concluir de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$? ¿qué se puede concluir de T ?
 - e) Sea $S : V \rightarrow V$ transformación lineal y V tiene dimensión finita. ¿Qué relación hay entre las siguientes propiedades de S ?
 - S es inyectiva.
 - S es epiyectiva.
 - S es un isomorfismo.¹

IV. **Definición:** Sea la siguiente secuencia de Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales:

$$\cdots \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{T_n} V_n \xrightarrow{T_{n+1}} V_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Se dice EXACTA EN V_n si $\text{Ker}(T_{n+1}) = \text{Im}(T_n)$. Una SECUENCIA es EXACTA si es exacta en cada uno de sus espacios vectoriales. Así, sea la siguiente SECUENCIA EXACTA:

$$\mathbf{0} \longrightarrow U \xrightarrow{T_1} V \xrightarrow{T_2} W \longrightarrow \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{0}$ denota al Espacio Vectorial trivial $\{0\}$ ²

- a) La secuencia es EXACTA EN U si y sólo si T_1 es inyectiva.
- b) La secuencia es EXACTA EN W si y sólo si T_2 es epiyectiva.
- c) Sean U y V espacios vectoriales, demuestre que la siguiente secuencia es EXACTA:

$$\mathbf{0} \longrightarrow U \xrightarrow{\iota_1} U \times V \xrightarrow{\pi_2} V \longrightarrow \mathbf{0}$$

Con $\iota_1 : U \rightarrow U \times V$ tal que $\iota_1(a) = (a, 0_V), \forall a \in U$.

Y $\pi_2 : U \times V \rightarrow V$ tal que $\pi_2(a, b) = b, \forall (a, b) \in U \times V$.

¹Una palabra fuerte que si son algebraistas escucharán mucho. S es un isomorfismo si, y sólo si es invertible.

²Una secuencia como esta, se dice EXACTAMENTE CORTA