

a) Sabemos que la suma de matrices es conmutativa, asociativa, posee neutro y cada matriz posee inverso aditivo. Así, sean $M_1, M_2 \in M_2(\mathbb{C})$, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} z & w \\ t & u \end{pmatrix} ; M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } z, w, t, u, a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \text{luego } (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} z & w \\ t & u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)z & (\alpha + \beta)w \\ (\alpha + \beta)t & (\alpha + \beta)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z + \beta z & \alpha w + \beta w \\ \alpha t + \beta t & \alpha u + \beta u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha z & \alpha w \\ \alpha t & \alpha u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta z & \beta w \\ \beta t & \beta u \end{pmatrix} = \alpha M_1 + \beta M_1 \end{aligned}$$

$$(\alpha \beta) \begin{pmatrix} z & w \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha \beta)z & (\alpha \beta)w \\ (\alpha \beta)t & (\alpha \beta)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta z) & \alpha(\beta w) \\ \alpha(\beta t) & \alpha(\beta u) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta z & \beta w \\ \beta t & \beta u \end{pmatrix} = \alpha(\beta M_1)$$

$$\begin{aligned} \alpha(M_1 + M_2) &= \alpha \begin{pmatrix} z+a & w+b \\ t+c & u+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(z+a) & \alpha(w+b) \\ \alpha(t+c) & \alpha(u+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z + \alpha a & \alpha w + \alpha b \\ \alpha t + \alpha c & \alpha u + \alpha d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha z & \alpha w \\ \alpha t & \alpha u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \\ &= \alpha M_1 + \alpha M_2 \end{aligned}$$

$$1_{\mathbb{R}} \cdot M_1 = M_1$$

luego $M_2(\mathbb{C})$ es $\mathbb{R}$ -E.V.

Así, sean $A, B \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ por ver si $A + \alpha B \in V$?

$$A + \alpha B = \begin{pmatrix} A_{11} + \alpha B_{11} & A_{12} + \alpha B_{12} \\ A_{21} + \alpha B_{21} & A_{22} + \alpha B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{donde}$$

$A \in V$, debe cumplirlo.

$B \in V$, debe cumplirlo.

$$A_{11} + \alpha B_{11} + A_{22} + \alpha B_{22} = (A_{11} + A_{22}) + \alpha(B_{11} + B_{22}) = 0 + \alpha 0 = 0$$

luego $A + \alpha B \in V$, por tal V es subespacio de $M_2(\mathbb{C})$ en particular es un $\mathbb{R}$ -E.V.

$$V = \{ M \in M_2(\mathbb{C}) : M_{11} + M_{22} = 0 \}$$

É de erratas: $M_2(\mathbb{C})$ como R-E.V. tiene dimensión 8
esto se puede ver con la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

Para encontrar una base de V tenemos que notar que la matriz genérica $M \in V$ con

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ tq } a+d=0, \text{ de esta forma}$$

Notar que $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

las sgtes matrices generan a V

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Estas generan los
valores $\text{Im}(z)=0$
de $M_2(\mathbb{C})$

Estas generan los
valores $\text{Re}(z)=0$
de $M_2(\mathbb{C})$

Generan a todo $z \in \mathbb{C}$, con z
componente de $M_2(\mathbb{C})$

Falta ver que S es L.I. para que sea Base

$$\text{luego } \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu \in \mathbb{R}$

!!!

Importante, los escalares tienen que estar en $\mathbb{R}$ para que V sea $\mathbb{R}$ -E.V.

$$\text{luego } \alpha + \delta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \delta = 0$$

$$\beta + \eta i = 0 \Leftrightarrow \beta = \eta = 0$$

$$\gamma + \nu i = 0 \Leftrightarrow \gamma = \nu = 0$$

Así S es L.I. sobre $\mathbb{R}$.

Por lo tanto S es base de V .

c) Sea $W = \{A \in V : A_{21} = \overline{A_{21}}\}$

Demostraremos que W es subespacio vectorial,

para ello tomamos las matrices genéricas $A, B \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

luego

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{con } A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} \in \mathbb{C}$$

$$\text{donde } A_{11} + A_{22} = 0 \quad \text{y} \quad A_{21} = \overline{A_{21}}, \quad B_{21} = \overline{B_{21}}$$
$$B_{11} + B_{22} = 0$$

$$\text{Así } A + \alpha B = \begin{pmatrix} A_{11} + \alpha B_{11} & A_{12} + \alpha B_{12} \\ A_{21} + \alpha B_{21} & A_{22} + \alpha B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } A_{11} + \alpha B_{11} + A_{22} + \alpha B_{22} = \underbrace{(A_{11} + A_{22})}_{=0} + \alpha \underbrace{(B_{11} + B_{22})}_{=0}$$

$$\text{y donde } A_{21} + \alpha B_{21} = \overline{A_{21}} + \alpha \overline{B_{21}} = \overline{A_{21} + \alpha B_{21}}$$

luego $A + \alpha B \in W \Rightarrow W$ es subespacio vectorial

Luego una base de W es aquella que resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, para $A \in W$

$$A_{11} + A_{22} = 0 \quad \text{y} \quad A_{21} = \overline{A_{21}}$$

Donde la segunda condición ocurre solamente si $\text{Im}(A_{21}) = 0$
 luego A_{21} es un Real Puro

Así notamos que el siguiente conjunto B genera a W

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Notar que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} \notin B$, ya que ese componente es un Real Puro

luego $A \in W$ cumple

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} A_{11} + A_{22} = 0 \\ \text{Im}(A_{21}) = 0 \end{matrix}, \quad A_{11}, A_{12}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } A = & \text{Re}(A_{11}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \text{Re}(A_{12}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \text{Im}(A_{11}) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ & + \text{Im}(A_{12}) \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así, sólo falta ver que es L.I., pero no es difícil notar que $B \subseteq S$, donde S es la base de V .

Como S es L.I. $\Rightarrow B$ es L.I.

Demostración: Supongamos que B es L.D.

$$\text{Luego } \exists M_k \in B \text{ t.q. } M_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i M_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad M_i \in B - \{M_k\}$$

Así, sean $A_1, \dots, A_m \in S - B$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i M_i + (-1) M_k + \sum_{j=1}^m \beta_j A_j$ es una combinación lineal de los elementos de S

Luego sea $\beta_j = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i M_i - M_k + 0 = 0$, luego S es L.D. $\times$