Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Álgebra y Geometría II

Profa. Carolina Canales
Ayudantes: Alejandro Camacho
Stevan Cebrián

Ayudantía XVIII

6 de Noviembre, 2023

Ejercicios.

I. Identidad de Jacobi: Probar que $\forall\ A, B, C \in \mathbb{R}^3;\ A \times (B \times C) + B \times (A \times C) + C \times (A \times B) = 0$.

II. Probar que $\forall\ A, B \in \mathbb{R}^3$ se tiene la siguiente identidad:

$$\langle A, B\rangle^2 + \|A \times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2.$$

III. Demuestre que u y v son linealmente dependientes si y solo si $u \times v = \overrightarrow{0}$.

IV. Sean $v, w, u \in \mathbb{R}^3$. Demuestre

$$v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v) = u \cdot (v \times w)$$

V. Sea $\mathcal{L}$ la recta determinada por los puntos B y C y sea A un punto fuera de $\mathcal{L}$. Demuestre que la distancia de A a $\mathcal{L}$ está dada por

$$d(A, \mathcal{L}) = \frac{\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}$$

VI. Encuentre el volumen del paralelepípedo formado por los siguientes vectores $A = (3, -1, 1), B = (1, 7, 2)$ y $C = (2, 1, -4)$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Álgebra y Geometría II

Profa. Carolina Canales
Ayudantes: Alejandro Camacho
Stevan Cebrián

Ayudantía XIX

7 de Noviembre, 2023

Ejercicios.

I. Sea K un cuerpo, demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}, K^n := \{\alpha : \alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in K\}$; donde para $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in K^n$ y $c \in K$ se tiene que con la suma y el producto por escalar respectivos.

$$\alpha + \beta = (x_1 + x_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

Es un espacio vectorial.

II. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $K = \mathbb{R}$ se definen las siguientes operaciones:

$$(x, y + (x_1 + y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$
$$c(x, y) = (cx, y)$$

¿Es V un Espacio Vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?

III. Sea $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $K = \mathbb{Q}$, demuestre que V es un Espacio Vectorial sobre $\mathbb{Q}$ con la suma usual de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y con producto escalar el producto usual de $\mathbb{Q}$.

IV. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^1$ son $\mathbb{R}^1$ y el subespacio nulo.

b) Un subespacio de $\mathbb{R}^2$ es $\mathbb{R}^2$, el subespacio nulo o todos los múltiplos escalares de un vector fijo en $\mathbb{R}^2$.

Extra: ¿Puede usted describir los subespacios de $\mathbb{R}^3$?

V. Sea W_1 y W_2 subespacios de un Espacio Vectorial V tales que $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Demostrar que $\forall\ \alpha \in V$ existe dos vectores únicos $\alpha_1 \in W_1$ y $\alpha_2 \in W_2$ tales que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.