Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Álgebra y Geometría II

Profa. Carolina Canales
Ayudantes: Alejandro Camacho
Stevan Cebrián

Ayudantía XIV

23 de Octubre, 2023

Ejercicios.

I. Sean $L_1 + \vec{v}$ y $L_2 + \vec{w}$ con las rectas L_1 y L_2 que pasan por el origen, desplazadas por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, respectivamente. Además se denota, $\vec{u} \in L_n$ si $\vec{u}$ es un vector asociado a un punto de la recta L_n.
Demostrar que $\vec{v} - \vec{w} \in L_1 + L_2 := \{\vec{x} : \vec{x} = \vec{u} + \vec{t},\ \text{con } \vec{u} \in L_1 \text{ y } \vec{t} \in L_2\}$, si y sólo si, $(L_1 + \vec{v}) \cap (L_2 + \vec{w}) \neq \emptyset$

II. Encuentre las ecuaciones paramétricas e implícita de los planos XY, XZ e YZ. Y determine su posición relativa.

III. Pruebe que $\forall\ m \in \mathbb{N}$, se tiene que para todo $A_i, B \in \mathbb{R}^3$, $\forall\ \alpha_i \in \mathbb{R}$,

$$< \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i, B > = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\ < A_i, B >$$

IV. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ de polinomios con coeficientes reales de grado $\leq n$ unión el polinomio cero. Defina

$$\forall\ p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x],\ p(x), q(x) > = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Demuestre que este producto cumple todas las propiedades del producto interno usual en $\mathbb{R}^3$, a saber, simetría, distributividad, homogeneidad y positividad. Calcule por ejemplo $< x^2 + 5x - 8, 2x + 3 >$.

V. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, demostrar que $\alpha = \beta$ si, y sólo si, $\forall \gamma \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Álgebra y Geometría II

Profa. Carolina Canales
Ayudantes: Alejandro Camacho
Stevan Cebrián

Ayudantía XV

24 de Octubre, 2023

Ejercicios.

I. Enuncie y demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$.

II. Calcular $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y hallar el ángulo entre ellos:

a) $\vec{u} = (-1, 3, 1)$; $\vec{v} = (-2, -3, -7)$.

b) $\vec{u} = (-1, 0, 3)$; $\vec{v} = (0, 4, 0)$.

c) $\vec{u} = (-1, 2, -3)$; $\vec{v} = (-1, -3, 4)$.

III. Suponer que una fuerza $\vec{F}$ (por ejemplo, la gravedad) actúa verticalmente hacía abajo sobre un objeto situado en un plano de 45^o respecto a la horizontal. Expresar esta fuerza como suma de una fuerza que actúe paralela al plano y una que actúe perpendicular a él.

IV. Una fuerza de $6N$ (Newtons) forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con el eje y, apuntando a la derecha. La fuerza actúa en contra del movimiento de un objeto a lo largo de la recta que une $(1, 2)$ con $(5, 4)$.

a) Hallar una fórmula para el vector fuerza $\vec{F}$.

b) Hallar el ángulo θ entre la dirección del desplazamiento $\vec{D} = (4, 2)$ y la dirección de la fuerza $\vec{F}$.

c) El trabajo realizado es $\vec{F} \cdot \vec{D}$, o de manera equivalente, $\|\vec{F}\|\|\vec{D}\|cos(\theta)$. Calcular el trabajo con ambas fórmulas y compare ambos resultados.

V. Hallar la proyección de los siguientes vectores $\vec{u}$ sobre los vectores $\vec{v}$:

a) $\vec{u} = (-1, 1, 1); \vec{v} = (2, 1, -3)$

b) $\vec{u} = (2, 1, -3)$; $\vec{v} = (-1, 1, 1)$.