Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Álgebra y Geometría II

Profa. Carolina Canales
Ayudantes: Alejandro Camacho
Stevan Cebrián

Ayudantía X

02 de Octubre, 2023

Ejercicios.

I. Supongase que A es una matriz de 2×1 y B es una matriz de 1×2. Demostrar que $C = AB$ no es invertible.

II. Determine si la siguiente matriz es invertible, de ser así encuentre su inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

III. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre:

a) Si A es inversible y $AB = 0$, para algún $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $B = 0$.

b) Si A no es inversible, entonces existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = 0$ y $B \neq 0$.

IV. Determine si la siguiente matriz es invertible

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

Ayudantía XI

03 de Octubre, 2023

Ejercicios.

I. A recomendación de José Miguel Martínez, **Ejercicio 6.1.16** Denotemos $\varepsilon_{rs} = (x_{rs}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz tal que:

$$\begin{cases} x_{ij} = 1 & \text{si } i = r \text{ y } j = s \\ x_{ij} = 0 & \text{en todo otro caso} \end{cases}$$

Demuestre que se tienen las siguientes propiedades:

a) $\varepsilon_{rs}\varepsilon_{kl} = 0, \ \forall s \neq k$.

b) $\varepsilon_{rs}\varepsilon_{sl} = \varepsilon_{rl}, \ \forall r, s, k \in \{1, \ldots, n\}$.

c) Toda matriz $A = (a_{ij}$ se escribe como suma de múltiplos de estas matrices ε_{rs}.

II. Calcular el siguiente determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & \alpha^2 & \beta^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & \alpha^2 & \alpha\beta \\ \beta^2 & \alpha\beta & \alpha\beta & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

III. Demuestre los siguientes hechos obvios

a) Sea B la matriz obtenida de multiplicar la i-ésima fila de la matriz A por una constante c, entonces $det(B) = c \cdot det(A)$.

b) $det(cA) = c^n \cdot det(A)$

IV. Demuestre que para $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ matriz invertible, se tiene que:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)$$

V. **Extra:** Analice y demuestre la siguiente regla: Si $AX = B$ es un sistema de ecuaciones con

$$B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Tenemos que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ invertible. Entonces

$$x_i = \frac{\Delta_i}{det(A)}, \text{ son soluciones únicas}$$

Donde Δ_i es el determinante de la matriz tal que se reemplaza la i-ésima columna por la matriz B.