Prueba 1

Álgebra y Geometría II

Viernes 22 de abril de 2022

Instrucciones:

- Lea bien los enunciados.
- Ante cualquier duda, consulte.
- Ponga su nombre en la parte alta de todas las hojas.
- Escriba de forma ordenada y justifique todas sus respuestas.
- No tema hacer dibujos.

Duración: 1h30.
Puntajes: $P_1 = 0,5 + 0,5 = 1$ punto; $P_2 = 1,5$ puntos; $P_3 = 1,5$ puntos;
$P_4 = 0,6 + 0,2 + 1 + 0,2 = 2$ puntos.

1. Encuentre $k \in \mathbb{R}$ tal que las rectas de ecuación

$$L_1 : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 3 + t \end{cases} , \, t \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \frac{x}{k} = \frac{y-1}{3}$$

sean

(a) paralelas

(b) perpendiculares

2. Demuestre que la distancia entre un foco de la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y una asíntota es b.

3. Determine la ecuación de la recta que pasa por el centro de la elipse de ecuación $9x^2 - 18x + 4y^2 - 16y = 11$ y por el vértice de la parábola de ecuación $x^2 + 6x - 4y - 11 = 0$.

4. Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola de ecuación

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

(a) Encuentre el centro, los focos, los vértices, las asíntotas y la excentricidad de $\mathcal{H}$. Además dibuje $\mathcal{H}$.

(b) Llamaremos V_+ al vértice de $\mathcal{H}$ con primera coordenada positiva. Sea $\alpha > 1$ y sea $\mathcal{C}_\alpha$ el círculo de centro $(\alpha, 0)$ que pasa por el vértice V_+ de $\mathcal{H}$. Encuentre la ecuación de $\mathcal{C}_\alpha$.

(c) En función de α, encuentre los puntos de intersección de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{C}_\alpha$.

(d) En función de α, diga si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{C}_\alpha$ son secantes o tangentes.

Soluciones

1. Denotaremos m_1 y m_2 a las pendientes de las rectas L_1 y L_2 respectivamente. La recta L_1 está dada por una ecuación paramétrica. Reconocemos a su pendiente en los coeficientes que acompañan al parámetro t.
$$m_1 = \frac{1}{4}.$$
La recta L_2 está dada por una ecuación simétrica. Note que $k \neq 0$ para que la ecuación tenga sentido. Vamos a transformarla en una ecuación principal para reconocer su pendiente.
$$\begin{aligned} \frac{x}{k} &= \frac{y-1}{3} \\ 3x &= k(y+1) \\ y &= \frac{3x}{k} - 1 \end{aligned}$$
Luego
$$m_2 = \frac{3}{k}.$$
   (a) Para que L_1 y L_2 sean paralelas, sus pendientes deben ser iguales, así
$$m_1 = m_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{4} = \frac{3}{k} \qquad \Leftrightarrow \qquad k = 12.$$
   (b) Para que L_1 y L_2 sean perpendiculares, $m_1 m_2 = -1$. Así
$$-1 = m_1 m_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{k} \qquad \Leftrightarrow \qquad k = -\frac{3}{4}$$

2. La hipérbola de ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
tiene asíntotas de ecuación $y = \pm\frac{b}{a}x$.

   Las coordenadas de sus focos son $(\pm c, 0)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$.

   Vamos a demostrar que la distancia del punto $F(c, 0)$ a la recta L de ecuación $y = \frac{b}{a}x$ es b. Para las otras elecciones de foco y asíntota los cálculos son los mismos.

   La ecuación general de L es $bx - ay = 0$.

   La distancia de F a L está dada por
$$d(F, L) = \frac{|b \cdot c - a \cdot 0|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|b \cdot c|}{|c|} = |b| = b$$
lo que demuestra el enunciado.

3. Primero necesitamos el centro de la elipse, al que llamaremos C, y el vértice de la parábola, al que llamaremos V. Para encontrarlos, completamos cuadrados.

   En la ecuación de la elipse:

$$\begin{aligned}
9x^2 - 18x + 4y^2 - 16y &= 11 \\
9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 - 4y + 4 - 4) &= 11 \\
9(x-1)^2 - 9 + 4(y-2)^2 - 16 &= 11 \\
9(x-1)^2 + 4(y-2)^2 &= 36 \\
\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} &= 1
\end{aligned}$$

   Vemos entonces que el centro tiene coordenadas $C(1,2)$.

   Completamos cuadrados en la ecuación de la parábola:

$$\begin{aligned}
x^2 + 6x - 4y - 11 &= 0 \\
x^2 + 6x + 9 - 9 - 4y - 11 &= 0 \\
(x+3)^2 &= 4y + 20 \\
(x+3)^2 &= 4(y+5)
\end{aligned}$$

   Así, el vértice de esta parábola tiene coordenadas $V(-3,-5)$.

   La recta que pasa por los puntos C y V tiene como ecuación punto pendiente

$$y - 2 = \frac{-5-2}{-3-1}(x-1),$$

   o ecuación general

$$7x - 4y + 1 = 0.$$

4. Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola de ecuación

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

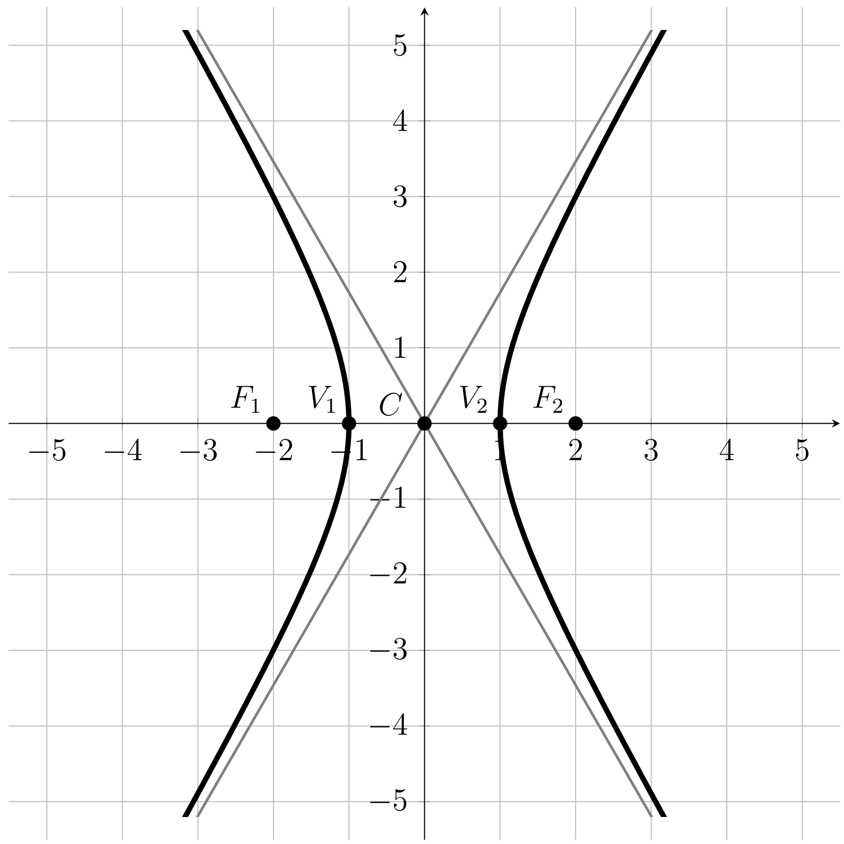
   (a) Encuentre el centro, los focos, los vértices, las asíntotas y la excentricidad de $\mathcal{H}$. Además dibuje $\mathcal{H}$.

   De la ecuación podemos obtener inmediatamente que el centro tiene coordenadas $C(0,0)$, además de los valores

$$a = 1,\ b = \sqrt{3},\ c = 2.$$

   Con esto, las coordenadas de los vértices son $V_1(-1,0)$ y $V_2(1,0)$, las coordenadas de los focos son $F_1(-2,0)$ y $F_2(2,0)$, la excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = 2$, y las asíntotas tienen ecuación $y = \pm\sqrt{3}x$.

Dibujo de $\mathcal{H}$:



(b) El punto V_+ tiene coordenadas $(1,0)$. El centro del círculo $\mathcal{C}_\alpha$ tiene coordenadas $(\alpha,0)$. Para conocer el radio del círculo calculamos la distancia entre estos dos puntos, obteniendo

$$r = \alpha - 1.$$

La ecuación de $\mathcal{C}_\alpha$ es entonces

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = (\alpha-1)^2.$$

(c) Para encontrar los puntos de intersección de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{C}_\alpha$, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1 & (1) \\ (x-\alpha)^2 + y^2 = (\alpha-1)^2 & (2) \end{cases}$$

Despejamos y^2 de (2)

$$y^2 = (\alpha-1)^2 - (x-\alpha)^2 \tag{3}$$

y reemplazamos en (1)

$$3x^2 - (\alpha-1)^2 + (x-\alpha)^2 = 3$$

Queremos obtener los puntos de intersección de $\mathcal{H}$ con $\mathcal{C}_\alpha$, así que vamos a buscar soluciones para x en la última ecuación.

$$\begin{aligned}
3x^2 - (\alpha-1)^2 + (x-\alpha)^2 - 3 &= 0\\
3x^2 - \alpha^2 + 2\alpha - 1 + x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 - 3 &= 0\\
4x^2 - 2\alpha x + 2\alpha - 4 &= 0\\
2(2x^2 - \alpha x + \alpha - 2) &= 0
\end{aligned}$$

Usando la fórmula para las raíces de una ecuación cuadrática, tenemos

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\cdot 2\cdot(\alpha-2)}}{4}\\
x &= \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16}}{4}\\
x &= \frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha-4)^2}}{4}\\
x &= \frac{\alpha \pm |\alpha-4|}{4}
\end{aligned}$$

Si $\alpha = 4$, tenemos 1 sola solución $x = 1$, $y = 0$, por lo tanto tenemos un sólo punto de intersección $(1, 0)$.

Si $1 < \alpha < 4$ entonces $|\alpha - 4| = 4 - \alpha$, por lo que las soluciones son

$$x = \frac{\alpha + 4 - \alpha}{4} = 1 \qquad \text{ó} \qquad x = \frac{2\alpha - 4}{4} = \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Reemplazando x en (3), tenemos

$$\begin{aligned}
y^2 &= (\alpha-1)^2 - \left(\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) - \alpha\right)^2\\
y^2 &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 - \left(-\frac{\alpha}{2} - 1\right)^2\\
y^2 &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 - \left(\frac{\alpha^2}{4} + \alpha + 1\right)\\
y^2 &= \frac{3\alpha^2}{4} - 3\alpha\\
y^2 &= 3\alpha\left(\frac{\alpha}{4} - 1\right),
\end{aligned}$$

donde el último paréntesis es menor que 0 por las restricciones que tiene α en este caso. Por lo tanto el único punto de intersección en este caso es $(1, 0)$.

Si $\alpha > 4$ entonces $|\alpha - 4| = \alpha - 4$, por lo que las soluciones dan una vez más

$$x = \frac{\alpha + \alpha - 4}{4} = \frac{2\alpha - 4}{4} = \frac{\alpha}{2} - 1 \qquad \text{ó} \qquad x = \frac{\alpha - \alpha + 4}{4} = 1.$$

El mismo cálculo que en el caso anterior nos da que $x = \dfrac{\alpha}{2} - 1$ e $y = \pm\sqrt{3\alpha\left(\dfrac{\alpha}{4} - 1\right)}$, o $x = 1$ e $y = 0$.

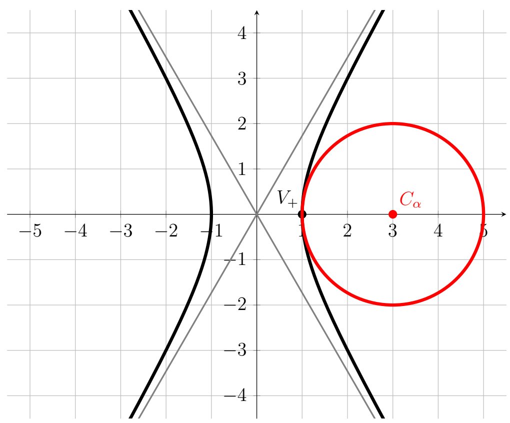
En este caso tenemos 3 puntos de intersección

$$(1,0), \qquad \left(\frac{\alpha}{2} - 1, \sqrt{3\alpha\left(\frac{\alpha}{4} - 1\right)}\right), \qquad \left(\frac{\alpha}{2} - 1, -\sqrt{3\alpha\left(\frac{\alpha}{4} - 1\right)}\right)$$

(d) Ya que si $1 < \alpha \leq 4$ tenemos un solo punto de intersección, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{C}_\alpha$ son tangentes. Para $\alpha > 4$, al haber 3 puntos de intersección, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{C}_\alpha$ son secantes.

(∗) Aquí hay algunos dibujos para que vea que es lo que está pasado.

Dibujo para $\alpha = 3$:



Dibujo para $\alpha = 7$: