Tarea - Control 2
Álgebra y Geometría II

Instrucciones:

- Lea bien los enunciados y ante alguna duda pregunte.
- Escriba de forma ordenada y justifique todas sus respuestas.
- La entrega se realizará exclusivamente de forma online en la plataforma U-Cursos, sección tareas.
- Envíe sólo un archivo en formato pdf.
- Ponga su nombre en la parte alta de la primera hoja.
- El scan debe ser legible.
- El atraso en la entrega provocará el descuento de puntos en función de la magnitud del atraso.

Fecha límite de entrega: martes 31 de mayo a las 20h.

1. Vamos a trabajar con la siguiente ecuación

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 25x + 50 = 0.$$

   a) Identifique de qué cónica se trata.
   b) Rote la cónica para eliminar el término en xy.
   c) Identifique los elementos importantes de la cónica en el nuevo sistema de coordenadas.
   d) Haga un bosquejo de la gráfica en el sistema de referencia de coordenadas x e y.

2. Sea $k \in \mathbb{R}$. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones en función de k.

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & + & z & = 4 \\ -x & + & ky & + & 2z & = 5 \\ 7x & + & 3y & + & (k-5)z & = 7 \end{cases}$$

3. Encuentre la inversa de la siguiente matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 16 & 22 \\ 1 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

4. Demuestre que el conjunto

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x + 2y = 0 \right\}$$

con la operación suma definida por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

y la operación producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

es un espacio vectorial.

Soluciones

1. Vamos a trabajar con la siguiente ecuación

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 25x + 50 = 0. \tag{1}$$

   a) Identifique de qué cónica se trata.

   Vemos que en nuestra ecuación

$$A = 4, \qquad B = 4 \qquad \text{y} \qquad C = 1.$$

   El discriminante es entonces

$$B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0,$$

   lo que significa que nuestra cónica es del género parábola.

   b) Rote la cónica para eliminar el término en xy.

   Según el teorema visto en clases, debemos rotar a la cónica en un ángulo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que

$$\tan(2\alpha) = \frac{B}{A - C} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}.$$

   Vamos a usar varias identidades trigonométricas para obtener $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$. Primero,

$$\cos^2(2\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(2\alpha)} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}.$$

   Como $\tan(2\alpha)$ es positiva, entonces $\cos(2\alpha)$ también lo es, por lo que

$$\cos(2\alpha) = \frac{3}{5}.$$

   Vamos a usar ahora las identidades para seno y coseno de la mitad de un ángulo, así

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

   y

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

   por lo tanto

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{y} \qquad \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

   El cambio de coordenadas que tenemos que hacer para eliminar el término xy es

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2x' - y') \\[2ex] y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(x' + 2y') \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación (1), tenemos

$$\frac{4}{5}\left(2x'-y'\right)^2+\frac{4}{5}\left(2x'-y'\right)\left(x'+2y'\right)+\frac{1}{5}\left(x'+2y'\right)^2-\frac{25}{\sqrt{5}}\left(2x'-y'\right)+50=0$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{5}&\left(4x'^2-4x'y'+y'^2+2x'^2+4x'y'-y'x'-2y'^2\right)\\&\qquad\qquad+\frac{1}{5}\left(x'^2+4x'y'+4y'^2\right)-5\sqrt{5}\left(2x'-y'\right)+50=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{5}\left(6x'^2-y'^2\right)+\frac{1}{5}\left(x'^2+4y'^2\right)-5\sqrt{5}\left(2x'-y'\right)+50&=0\\ \frac{1}{5}\left(24x'^2-4y'^2+x'^2+4y'^2\right)-5\sqrt{5}\left(2x'-y'\right)+50&=0\\ 5x'^2-10\sqrt{5}x'+5\sqrt{5}y'+50&=0\\ x'^2-2\sqrt{5}x'+\sqrt{5}y'+10&=0 \qquad (2)\end{aligned}$$

c) Identifique los elementos importantes de la cónica en el nuevo sistema de coordenadas.
Vamos a completar cuadrados en la ecuación (2).

$$\begin{aligned}x'^2-2\sqrt{5}x'+5-5+\sqrt{5}y'+10&=0\\ \left(x'-\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}y'+5&=0\end{aligned}$$

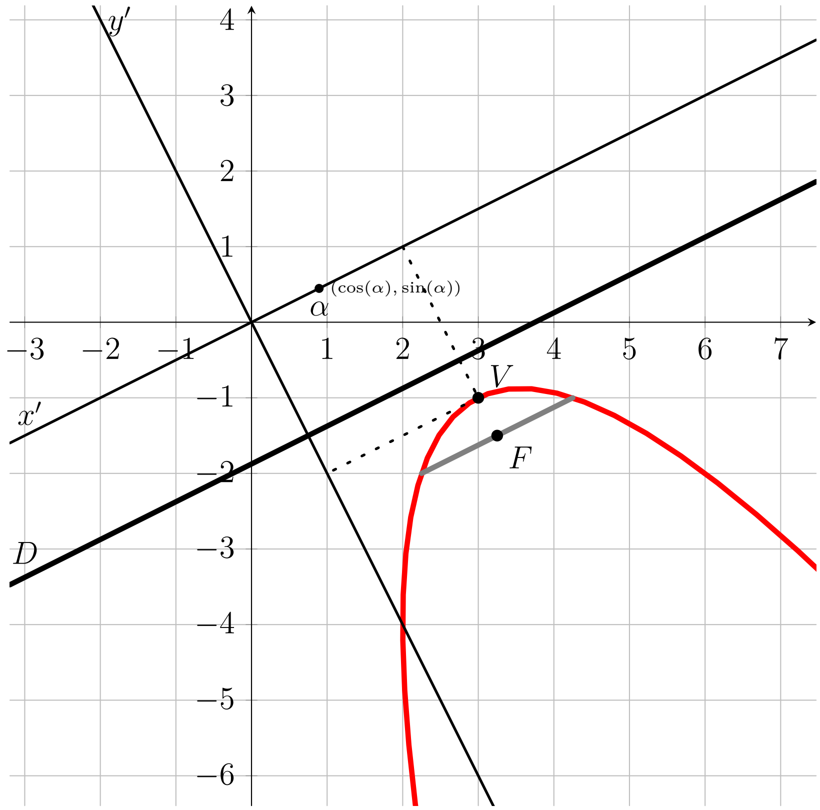
Vamos a reordenar esta ecuación para obtener las coordenadas del vértice de la parábola (h,k) y p.

$$\begin{aligned}\left(x'-\sqrt{5}\right)^2&=-\sqrt{5}y'-5\\ \left(x'-\sqrt{5}\right)^2&=-\sqrt{5}\left(y'+\sqrt{5}\right)\\ \left(x'-\sqrt{5}\right)^2&=4\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\left(y'+\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

Tenemos entonces que nuestra cónica es una parábola vertical en el sistema de coordenadas $x'y'$ con

$$V\left(\sqrt{5},-\sqrt{5}\right),\qquad p=-\frac{\sqrt{5}}{4},\qquad F\left(\sqrt{5},-\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)\qquad \text{y}\qquad D:\ y'=-\frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

d) Haga un bosquejo de la gráfica en el sistema de referencia de coordenadas x e y.



2. Sea $k \in \mathbb{R}$. Para encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & + & 3y & + & z & = 4 \\ -x & + & ky & + & 2z & = 5 \\ 7x & + & 3y & + & (k-5)z & = 7 \end{array}\right.$$

primero asociamos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & k & 2 & 5 \\ 7 & 3 & k-5 & 7 \end{array}\right)$$

la que debemos escalonar.

Como escribir matrices en LaTeX es algo largo, vamos a hacer varias operaciones juntas. Comenzamos con

$$F_2 \to F_2 - 3F_1 + F_3 \qquad \text{y} \qquad F_3 \to -2F_3 + 7F_1$$

que trasforman a la matriz en

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & k-6 & k-6 & 0 \\ 0 & 15 & 17-2k & 14 \end{array}\right)$$

Si $k = 6$ entonces la segunda línea es nula y el rango de esta matriz extendida es 2, que es menor que el número de variables que es 3, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Para encontrarlas, primero reemplazamos $k = 6$ en nuestra matriz obteniendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 5 & 14 \end{array}\right)$$

y hacemos las operaciones

$$F_1 \to \frac{1}{2}F_1 \qquad \text{y} \qquad F_3 \to \frac{1}{15}F_3$$

además de intercambiar la fila 2 y la fila 3 para dejar la fila nula abajo. Tenemos entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{14}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y la operación

$$F_1 \to F_1 - \frac{3}{2}F_2$$

nos da finalmente a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{14}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que equivale al sistema

$$\begin{cases} x & = \frac{3}{5} \\ y + \frac{1}{3}z & = \frac{14}{15} \end{cases}$$

que tiene como soluciones a los triples

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}, \frac{14 - 5t}{15}, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $k \neq 6$ vamos a hacer las operaciones

$$F_3 \to -\frac{1}{2}F_3 + \frac{15}{2(k-6)}F_2 \qquad \text{y} \qquad F_2 \to \frac{1}{k-6}F_2$$

que transforman a la matriz en

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & -7 \end{array}\right)$$

Si $k = 1$ el sistema no tiene soluciones ya que, denotando por A a la matriz de 3×3 a la izquierda de la linea vertical y por B a la matriz de 3×1 a la derecha de la línea vertical, tenemos $\text{rango}(A) = 2 < 3 = \text{rango}(A \mid B)$.

Si $k \neq 1$ el sistema tiene solución única. Para encontrarla seguiremos haciendo operaciones fila hasta obtener la matriz identidad al lado izquierdo de la línea vertical.

$$F_3 \to \frac{1}{k-1}F_3 \qquad \text{y} \qquad F_2 \to F_2 - \frac{1}{k-1}F_3$$

nos llevan a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{k-1} \end{array}\right)$$

y finalmente

$$F_1 \to \frac{1}{2}(F_1 - 3F_2 - F_3)$$

nos deja

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{k-9}{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{k-1} \end{array}\right)$$

Por lo tanto, si $k \neq 6$ y $k \neq 1$ el sistema tiene solución única dada por

$$(x, y, z) = \left(\frac{k-9}{k-1}, \frac{7}{k-1}, -\frac{7}{k-1}\right), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{1, 6\}.$$

3. Vamos denotar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 16 & 22 \\ 1 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la inversa de la matriz A, tenemos que realizar operaciones de filas con la matriz extendida

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 16 & 22 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

hasta obtener al lado derecho de la linea la matriz identidad. Al lado izquierdo de la línea aparecerá la matriz inversa buscada.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 16 & 22 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad F_3 \to F_3 - F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 16 & 22 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad F_2 \to F_2 - 3F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad F_3 \to F_3 - 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad F_2 \to F_2 - 4F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -23 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad F_1 \to F_1 - 5F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 6 & 116 & -45 & 20\\ 0 & 1 & 0 & -23 & 9 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1\end{array}\right) \qquad F_1 \to F_1 - 6F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 86 & -33 & 14\\ 0 & 1 & 0 & -23 & 9 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1\end{array}\right)$$

Comprobemos que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 86 & -33 & 14\\ -23 & 9 & -4\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

es inversa de A.

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix}1 & 5 & 6\\ 3 & 16 & 22\\ 1 & 7 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 86 & -33 & 14\\ -23 & 9 & -4\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 86 - 5\cdot 23 + 6\cdot 5 & -33 + 5\cdot 9 - 6\cdot 2 & 14 - 5\cdot 4 + 6\\ 3\cdot 86 - 16\cdot 23 + 22\cdot 5 & -3\cdot 33 + 16\cdot 9 - 22\cdot 2 & 3\cdot 14 - 16\cdot 4 + 22\\ 86 - 7\cdot 23 + 15\cdot 5 & -33 + 7\cdot 9 - 15\cdot 2 & 14 - 7\cdot 4 + 15\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 86 & -33 & 14\\ -23 & 9 & -4\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5 & 6\\ 3 & 16 & 22\\ 1 & 7 & 15\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 86 - 33\cdot 3 + 14 & 86\cdot 5 - 33\cdot 16 + 14\cdot 7 & 86\cdot 6 - 33\cdot 22 + 14\cdot 15\\ -23 + 9\cdot 3 - 4 & -23\cdot 5 + 9\cdot 16 - 4\cdot 7 & -23\cdot 6 + 9\cdot 22 - 4\cdot 15\\ 5 - 2\cdot 3 + 1 & 25 - 2\cdot 16 + 7 & 5\cdot 6 - 2\cdot 22 + 15\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 86 & -33 & 14\\ -23 & 9 & -4\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

4. Demuestre que el conjunto

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x + 2y = 0 \right\}$$

con la operación suma definida por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

y la operación producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

es un espacio vectorial.

Tenemos que demostrar que el conjunto S con estas operaciones verifica las propiedades de las operaciones entre flechas.

Vamos a denotar $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ y $w = (x_3, y_3)$.

Cerradura

Si $u, v \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $u + v \in S$ y $\lambda v \in S$.

Demostración. Por la definición de la suma

$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Además como u y v son elementos de S entonces

$$\begin{cases} 5x_1 + 2y_1 = 0 \\ 5x_2 + 2y_2 = 0 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos

$$5(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0.$$

Vemos que dentro de los paréntesis aparecen las componentes de $u + v$, por lo tanto $u + v \in S$.

Ahora, como $v \in S$, entonces

$$5x_2 + 2y_2 = 0.$$

Multiplicando por $\lambda \in \mathbb{R}$ y reordenando, tenemos

$$5(\lambda x_2) + 2(\lambda y_2) = 0.$$

Dentro de los paréntesis aparecen las componentes de λv, por lo tanto $\lambda v \in S$. □

Conmutatividad de la suma

Para todos $u, v \in S$, $u + v = v + u$.

Demostración.

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) & \text{(Definición de suma)} \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) & \text{(Conmutatividad en } \mathbb{R}\text{)} \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) & \text{(Definición de suma)} \\ &= v + u & \square \end{aligned}$$

Asociatividad de la suma

Para todos $u, v, w \in S$, $u + (v + w) = (u + v) + w$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
u + (v + w) &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\
&= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) && \text{(Definición de suma)} \\
&= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) && \text{(Definición de suma)} \\
&= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) && \text{(Asociatividad en } \mathbb{R}\text{)} \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) && \text{(Definición de suma)} \\
&= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) && \text{(Definición de suma)} \\
&= (u + v) + w && \square
\end{aligned}$$

Neutro aditivo

Existe $0 \in S$ tal que para todo $v \in S$, $v + 0 = 0 + v = v$.

Demostración. El elemento $O = (0, 0)$ está en S ya que sus componentes verifican la ecuación $5x + 2y = 0$. Además

$$v + O = (x_2, y_2) + (0, 0) = (x_2 + 0, y_2 + 0) = (x_2, y_2) = v.$$

De la misma forma $O + v = v$, por lo que concluimos que existe un elemento neutro para la suma en S. $\square$

Inverso aditivo

Para todo $v \in S$ existe $(-v) \in S$ tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$.

Demostración. Dado $v = (x_2, y_2) \in S$, considere $(-v) = (-x_2, -y_2)$. Las componentes del elemento $(-v)$ verifican la ecuación $5x + 2y = 0$, por lo que $(-v) \in S$. Además

$$v + (-v) = (x_2, y_2) + (-x_2, -y_2) = (x_2 - x_2, y_2 - y_2) = (0, 0) = O.$$

Un cálculo similar da $(-v) + v = O$, por lo tanto para todo $v \in S$ existe un inverso aditivo en S. $\square$

Asociatividad del producto con escalares

Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in S$, $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(\lambda\mu)v &= (\lambda\mu)(x_2, y_2) \\
&= ((\lambda\mu)x_2, (\lambda\mu)y_2) && \text{(Definición del producto escalar)} \\
&= (\lambda(\mu x_2), \lambda(\mu y_2)) && \text{(Asociatividad de } \cdot \text{ en } \mathbb{R}\text{)} \\
&= \lambda(\mu x_2, \mu y_2) && \text{(Definición del producto escalar)} \\
&= \lambda\left(\mu(x_2, y_2)\right) && \text{(Definición del producto escalar)} \\
&= \lambda\left(\mu v\right) && \square
\end{aligned}$$

Neutro del producto con escalares

Par todo $v \in S$, $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$.

Demostración.

$$1 \cdot v = 1 \cdot (x_2, y_2) = (1 \cdot x_2, 1 \cdot y_2) = (x_2, y_2) = v.$$

Un cálculo similar da $v \cdot 1 = v$. □

Distributividad 1

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u, v \in S$, $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\lambda(u+v) &= \lambda((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= \lambda((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) && \text{(Definición de suma)} \\
&= (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(y_1 + y_2)) && \text{(Definición del producto escalar)} \\
&= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2) && \text{(Distributividad en } \mathbb{R}\text{)} \\
&= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2) && \text{(Definición de suma)} \\
&= \lambda(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) && \text{(Definición del producto escalar)} \\
&= \lambda u + \lambda v && \square
\end{aligned}$$

Distributividad 2

Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in S$, $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu)v &= (\lambda + \mu)(x_2, y_2) \\
&= ((\lambda + \mu)x_2, (\lambda + \mu)y_2) && \text{(Definición del producto escalar)} \\
&= (\lambda x_2 + \mu x_2, \lambda y_2 + \mu y_2) && \text{(Distributividad en } \mathbb{R}\text{)} \\
&= (\lambda x_2, \lambda y_2) + (\mu x_2, \mu y_2) && \text{(Definición de suma)} \\
&= \lambda(x_2, y_2) + \mu(x_2, y_2) && \text{(Definición del producto escalar)} \\
&= \lambda v + \mu v && \square
\end{aligned}$$