Matrices, sistemas y determinantes

1. Calculando el determinante de la matriz de coeficientes, diga si el siguiente sistema tiene solución única.
$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

2. Sea $k \in \mathbb{R}$. Calculando el determinante de la matriz de coeficientes, en función de k, diga cuándo el sistema tiene solución única.
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + ky + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (k-5)z = 7 \end{cases}$$

3. Encuentre el determinante de las siguientes matrices.
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 23 & 3 \\ 9 & 29 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 23 & 11 & 2 \\ -4 & -11 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

4. Encuentre la matriz adjunta y la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices, si existe.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -1 & 3 \\ -3 & 7 & -5 & 1 \\ 10 & 15 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -1 & 3 \\ -7 & 6 & -5 & 1 \\ 8 & 16 & -8 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. ¿Para qué valores de a la siguiente matriz es invertible?
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

6. Sean a_1, a_2, …, a_n números reales. Calcule los siguientes determinantes:
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix},$$

7. Sea j una raíz del polinomio $x^2 + x + 1 = 0$. Demuestre que el siguiente determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{vmatrix}$$

8. Sean a, b y c números reales. Demuestre que el siguiente determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c+1 \\ b+c & a+c & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

9. Un sistema de ecuaciones se puede escribir en términos de su matriz asociada A de la forma

$$AX = V$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Si A es invertible, demuestre que las soluciones del sistema se obtienen como

$$X = A^{-1}V.$$

Además, encuentre las soluciones del sistema del ejercicio 1 utilizando este método.

10. Benceno líquido se quema en la atmósfera. Si se coloca un objeto frío directamente sobre el benceno, se condensa agua en el objeto y se deposita una capa de hollín (Carbono). La ecuación para esta reacción química es de la forma

$$x_1 C_6H_6 + x_2 O_2 \longrightarrow x_3 C + x_4 H_2O$$

Determine los valores de x_1, x_2, x_3, x_4 que equilibran esta ecuación.

Ayuda: Igualar el número de átomos de cada tipo a ambos lados de la reacción.