MÁS MATRICES, SISTEMAS Y DETERMINANTES

1. Explique la relación entre el rango de la matriz de coeficientes, el rango de la matriz aumentada y el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.
2. Considere la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & | & 3 \\ 2 & 3 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Escriba el sistema de ecuaciones que corresponde a la matriz aumentada.
   b) Encuentre una matriz escalonada equivalente y úsela para resolver el sistema correspondiente.
3. Resuelva los siguientes sistemas usando la representación matricial.
   a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= -3 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 8x_4 &= 1 \end{aligned}$$

   d)

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 8_x4 &= 6 \end{aligned}$$

4. Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que el sistema siguiente tenga solución única (las incógnitas son x e y).

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

5. Repita el ejercicio anterior para un sistema de 3×3.

6. Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x+y+5z+5t &= 5 \\ x+2y+4z+7t &= 4 \\ x+y+3z+4t &= 3 \end{cases}$$

Escriba la matriz A del sistema y su matriz ampliada B.

7. Estudie en términos del parámetro α los siguientes sistemas, resuélvalos (cuando sea posible):

$$(1) \qquad \begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 3x+\alpha y+\alpha z &= 5 \\ 4x+\alpha y &= 5 \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha x+y+z &= 1 \\ x+\alpha y+z &= \alpha \\ x+y+\alpha z &= \alpha^2 \end{cases}$$

8. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y &= 8 \\ 4x+2y &= 16 \end{cases}$

Grafique, en $\mathbb{R}^2$, el conjunto de soluciones del sistema.

9. Resuelva los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\text{i)} \begin{cases} 2x+y+z &= 7 \\ -x+y-2z &= 1 \\ -3x+3y-6z &= 4 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ y-z &= 2 \\ x+2y &= 5 \end{cases} \qquad \text{iii)} \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ x+2y+3z &= 4 \\ 2x+3y+6z &= 6 \end{cases}$$

10. Resuelva los sistemas:

$$\text{i)} \begin{cases} 3x+2y &= 4 \\ x-3y &= 5 \\ -4x+y &= -9 \\ 2x-y &= 5 \\ 5x+6y &= 4 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} 3x+2y &= 4 \\ x-3y &= 5 \\ 2x-y &= 5 \\ 4x+3y &= 6 \\ x+5y &= -2 \end{cases}$$

iii)

$$\begin{cases} 2x-y+3z &= 0 \\ 3x+2y+z &= 0 \\ x-4y+5z &= 0 \end{cases}$$

11. Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5 &= 1 \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5 &= 2 \\ 3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-9x_5 &= 3 \end{cases}$$

12. Resuelva el sistema, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z &=& \lambda \\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z &=& \lambda \\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z &=& 1 \end{array}\right.$$

13. Supongamos que $A \in M_3(\mathbb{R})$ es la matriz de un sistema de ecuaciones de tres incógnitas y tres ecuaciones. Si A es invertible, demuestre que el sistema tiene una única solución. ¿Es esto válido si $A \in M_n(\mathbb{R})$?
14. Considere el sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+3z &=& 1 \\ x+4y+3z &=& 2 \\ x+3y+4z &=& 1 \end{array}\right.$

    Si A es la matriz de este sistema, calcule A^{-1} y luego encuentre directamente la solución del sistema utilizando A^{-1}, siguiendo la idea del ejercicio anterior.
15. Una matriz M se llama matriz de proyección si cumple que $M^2 = M$. Encuentre todas las matrices de 2×2 con esta propiedad.
16. Escriba la expresión para el determinante de una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

    en términos de sus coeficientes. Recuerde usar los signos determinados en los puntos anteriores.
17. Calcule usando la expresión anterior el determinante de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

18. Calcule el determinante de la matriz anterior C, usando operaciones fila o columna.
19. Considere el siguiente par de sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 2x_1+x_2+3x_3 &=& y_1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3 &=& y_2 \\ 6x_1+5x_2+5x_3 &=& y_3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y_1+3y_2-y_3 &=& z_1 \\ y_1+2y_3 &=& z_2 \end{array}$$

    Escriba un sistema de ecuaciones que relacione directamente las variables x_1, x_2, x_3 con las variables z_1, z_2. ¿Puede descubrir una relación con la multiplicación de matrices?
20. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

    a) Si $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$,encuentre $f(A)$.
    b) Si $g(x) = x^2 - 4x - 12$, encuentre $g(A)$.
    c) Encuentre una matriz $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no nula tal que $AU = 6U$.

d) Sean $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1) \in M_{13}(\mathbb{R})$. Dada la matiz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

encuentre e_1A, e_2A, e_3A, Ae_1^t, Ae_2^t y Ae_3^t.

21. Sean a, b y c números reales. Calcule el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

de varias formas distintas:

a) Usando la fórmula para el determinante de una matriz de 3×3 vista en clases.
b) Usando las propiedades relativas a las operaciones fila.
c) Usando el método de cofactores.

22. Calcule el determinante de la matriz (puede dejarlo factorizado).

a)

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{pmatrix}$$