

PRUEBA 2
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA II
Jueves 23 de junio de 2022

Instrucciones:

- Lea bien los enunciados.
- Ante cualquier duda, consulte.
- Ponga su nombre en la parte alta de todas las hojas.
- Escriba de forma ordenada y justifique todas sus respuestas.
- No tema hacer dibujos.
- El ejercicio * es opcional.

Duración: 1h30.

Puntajes: $P_1 = 0.7$ pts; $P_2 = 1$ pt; $P_3 = 0.8$ pts; $P_4 = 2$ pts; $P_5 = 1.5$ pts; $*$ = 0.5 pts.

1. Explique la relación entre el rango de la matriz de coeficientes, el rango de la matriz aumentada, el número de variables y la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.
2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = 3 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

- (a) Escriba la matriz aumentada que corresponde al sistema de ecuaciones.
 - (b) Encuentre una matriz escalonada equivalente y úsela para resolver el sistema.
3. Una matriz M se llama matriz de proyección si cumple que $M^2 = M$. Escriba un sistema de ecuaciones (no necesariamente lineales) que permita encontrar todas las matrices de 2×2 con coeficientes reales que tienen esta propiedad (no es necesario resolverlo).
 4. Calculando el determinante de la matriz de coeficientes, diga si el siguiente sistema tiene solución única. Si la tiene, utilice la inversa de la matriz de coeficientes para encontrar las soluciones.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

5. Identifique la cónica $6x^2 + 3xy + 2y^2 = 39$ y encuentre la matriz de rotación que permite eliminar el término en xy .

Puede usar las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2(2\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(2\alpha)}, \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}, \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

- * Escriba la ecuación de la cónica en el sistema de coordenadas $x'y'$ y bosqueje la gráfica en el sistema de coordenadas xy ubicando sólo el ángulo de rotación y los ejes de la cónica.

Soluciones

1. Para un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, sea A la matriz de coeficientes asociada y $(A | B)$ la matriz aumentada asociada al sistema.

Note que $\text{rango}(A) < \text{rango}(A | B)$ quiere decir que al pivotar aparece una línea que se traduce en la ecuación $0 = 1$, que vuelve al sistema incompatible.

Además si $\text{rango}(A | B) < n$ tenemos menos ecuaciones que incógnitas, lo que no nos permite dar un valor único a todas las variables.

Por esto, tenemos 3 posibilidades:

- Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A | B) = n$, entonces el sistema tiene solución única.
 - Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A | B) < n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.
 - Si $\text{rango}(A) < \text{rango}(A | B)$, entonces el sistema es incompatible y no tiene soluciones.
2. (a) Al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = 3 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

se le asocia la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

- (b) Escalonemos la matriz, para esto primero vamos a realizar la operación $F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2$, obteniendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Ahora haremos $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$, lo que nos deja

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 9 & 3 \\ 0 & 19 & -22 & -6 \end{array} \right)$$

Para obtener una matriz escalonada nos falta $F_2 \rightarrow \frac{1}{19}F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{22}{19} & -\frac{6}{19} \end{array} \right)$$

Vemos entonces que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A | B) = 2 < 3 = \text{número de variables}$, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones. Para encontrarlas haremos una operación fila más $F_1 \rightarrow F_1 + 8F_2$ que nos da la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{19} & \frac{9}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{22}{19} & -\frac{6}{19} \end{array} \right)$$

que equivale al sistema

$$\begin{cases} x - \frac{5}{19}z = \frac{9}{19} \\ y - \frac{22}{19}z = -\frac{6}{19} \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{cases} x = \frac{9}{19} + \frac{5}{19}t \\ y = -\frac{6}{19} + \frac{22}{19}t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Sea $M \in M_2(\mathbb{R})$,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Para que M sea una matriz de proyección debemos tener que $M^2 = M$.

Calculemos

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ba + bd \\ ca + cd & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

Luego

$$M^2 = M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ba + bd \\ ca + cd & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

lo que equivale al sistema

$$\begin{cases} a^2 - a + bc = 0 \\ ba + bd - b = 0 \\ ca + cd - c = 0 \\ d^2 - d + bc = 0 \end{cases}$$

4. Debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Denotaremos por A a la matriz de coeficientes, X a la matriz de 3×1 de las variables y por V a la matriz de 3×1 de los términos libres

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones escrito en forma matricial es

$$AX = V$$

Si $\det(A) \neq 0$, el sistema tiene solución única. Además en este caso la matriz A es invertible, y para encontrar las soluciones basta multiplicar todo por A^{-1} por la izquierda, ya que

$$\begin{aligned} AX &= V & /A^{-1}. \\ A^{-1}AX &= A^{-1}V \\ X &= A^{-1}V \end{aligned}$$

Calculemos el determinante de A .

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1 + 4) - 2(3 + 4) + (6 - 2) \\ &= 5 - 14 + 4 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Como este determinante es distinto de 0, el sistema tiene solución única.

Calculemos ahora la inversa de la matriz de coeficientes

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A).$$

Para encontrar la matriz adjunta de A , vamos a calcular los cofactores.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 & C_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 & C_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \\ C_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 & C_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 & C_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5 \\ C_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 & C_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 & C_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \end{aligned}$$

Así

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ -7 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, la solución del sistema es

$$X = A^{-1}V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \cdot \frac{7}{5} + \frac{1}{5} \\ -4 \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{29}{5} \\ -\frac{18}{5} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = \frac{29}{5} \\ z = -\frac{18}{5} \end{cases}$$

5. Primero veamos de qué tipo de cónica se trata

$$I = B^2 - 4AC = 9 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -39 < 0,$$

por lo que se trata de una curva del género elipse.

Para encontrar la matriz de rotación tenemos que encontrar seno y coseno del ángulo de rotación. Por un teorema visto en clases, el ángulo $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en que debemos rotar la cónica verifica

$$\tan(2\alpha) = \frac{B}{A - C} = \frac{3}{6 - 2} = \frac{3}{4}.$$

Usando las identidades trigonométricas proporcionadas, calculemos

$$\cos^2(2\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(2\alpha)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{25}.$$

Como $\tan(2\alpha) > 0$, también $\cos(2\alpha) > 0$, por lo que

$$\cos(2\alpha) = \frac{4}{5}$$

Ahora

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{2} = \frac{9}{10}$$

y

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{2} = \frac{1}{10}$$

por lo que

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{y} \quad \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

La matriz de rotación es entonces

$$R = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(*) El cambio de coordenadas que debemos realizar, escrito en forma matricial es

$$X = RX'$$

que equivale al sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación de la cónica

$$6x^2 + 3xy + 2y^2 = 39$$

tenemos

$$\begin{aligned}\frac{6}{10}(3x' - y')^2 + \frac{3}{10}(3x' - y')(x' + 3y') + \frac{2}{10}(x' + 3y')^2 &= 39 \\ 6(9x'^2 - 6x'y' + y'^2) + 3(3x'^2 + 8x'y' - 3y'^2) + 2(x'^2 + 6x'y' + 9y'^2) &= 390 \\ x'^2(54 + 9 + 2) + x'y'(-36 + 24 + 12) + y'^2(6 - 9 + 18) &= 390\end{aligned}$$

que da

$$65x'^2 + 15y'^2 = 390.$$

Finalmente, dividimos por 390, obteniendo

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{26} = 1.$$

Vemos entonces que en el sistema de coordenadas $x'y'$ la cónica es una elipse vertical, con ejes de largo $\sqrt{6}$ y $\sqrt{26}$.

Para dibujar la elipse dibujaremos el sistema de coordenadas $x'y'$ sobre el sistema de coordenadas xy . Note que la pendiente m de la recta que define el eje x' es

$$m = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{3}.$$

y además

$$2 < \sqrt{6} < 3 \quad \text{y} \quad 5 < \sqrt{26} < 6,$$

por lo que el dibujo de esta elipse es así

