Prueba 3

Álgebra y Geometría II

Lunes 11 de julio de 2022

Instrucciones:

- Lea bien los enunciados.
- Ante cualquier duda, consulte.
- Ponga su nombre en la parte alta de todas las hojas.
- Escriba de forma ordenada y justifique TODOS sus pasos.
- No tema hacer dibujos para apoyar sus argumentos.

Duración estimada: 1h30.
Puntajes tentativos: $P_1 = 1$ pt; $P_2 = 1.5$ pts; $P_3 = 1.5$ pts; $P_4 = 1$ pt; $P_5 = 1$ pt.

1. Sea S el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a distancia 13 del punto $P(12, 4, 3)$.

   (a) Encuentre una ecuación polinomial que satisfagan los puntos de S.

   (b) ¿Es S un espacio vectorial?

2. Considere los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(2, 3, -1)$ y la recta

$$L : \begin{cases} 3x + 2y - 7z - 4 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

   (a) Encuentre la ecuación implícita del plano Π_1 ortogonal a L y que pasa por P.

   (b) Encuentre la ecuación vectorial del plano Π_2 paralelo a L y que pasa por P y Q.

3. Encuentre los vectores $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{v} \perp (1, 0, 1)$ y el ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $(-1, -1, 0)$ sea $\frac{\pi}{6}$.

4. Sea P un punto en $\mathbb{R}^3$, Π un plano, Q un punto de Π y $\overrightarrow{n}$ un vector normal a Π.

   (a) Explique por qué $d(P, \Pi) = \left|\text{proy esc}_{\overrightarrow{n}}\, \overrightarrow{PQ}\right|$.

   (b) Encuentre la distancia entre el punto $P(0, 3, -3)$ y el plano $\Pi : x - 2y - 2z - 6 = 0$.

5. Sean A, B y C tres puntos de $\mathbb{R}^3$ no colineales. Sea L la recta que pasa por los puntos B y C. Demuestre que

$$d(A, L) = \frac{\left\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$$

Soluciones

1. (a) Sea $Q(x, y, z)$ un punto de $\mathbb{R}^3$. La distancia al cuadrado entre P y Q es

$$\begin{aligned}(d(P,Q))^2 &= \left\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right\|^2 \\ &= (x-12)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 \\ &= x^2 - 24x + 144 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 6z + 9 \\ &= x^2 - 24x + y^2 - 8y + z^2 - 6z + 169\end{aligned}$$

Si $Q \in S$ entonces $(d(P,Q))^2 = 13^2 = 169$, por lo que los puntos de S satisfacen la ecuación

$$x^2 - 24x + y^2 - 8y + z^2 - 6z = 0. \tag{1}$$

(b) El conjunto S no es un espacio vectorial, ya que para serlo es necesario ser cerrado bajo multiplicación escalar. Considere el punto $R \in S$, de coordenadas $R(0, 0, 6)$ y $\lambda = 2$. Entonces $\lambda(0, 0, 6) = (0, 0, 12)$ y este punto no está en S, ya que reemplazando sus coordenadas en la ecuación (1) tenemos

$$12^2 - 6 \cdot 12 = 12(12-6) = 12 \cdot 6 = 72 \neq 0.$$

2. Considere los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(2, 3, -1)$ y la recta

$$L : \begin{cases} 3x + 2y - 7z - 4 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Primero, encontraremos un vector director de L, ya que lo necesitaremos para ambas partes.

Ya que L está dada por la intersección de dos planos, podemos encontrar un vector director de L haciendo el producto cruz de vectores normales a un plano y al otro.

Por una proposición vista en clases, un vector normal al plano de ecuación $Ax+By+Cz+D = 0$ es $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$. Así, un vector director de L es

$$\overrightarrow{v} = (3, 2, -7) \times (1, 1, -2) = (-4+7, 6-7, 3-2) = (3, -1, 1).$$

(a) Queremos encontrar la ecuación implícita del plano Π_1 ortogonal a L y que pasa por P.

Para que L y Π_1 sean ortogonales (y por ende perpendiculares) un vector normal de Π_1 debe ser proporcional a un vector director de L. Por esto, si la ecuación de Π_1 es $Ax + By + Cz + D = 0$, los coeficientes A, B y C pueden ser considerados como $(A, B, C) = (3, -1, 1)$, y la ecuación de Π_1 sería $3x - y + z + D = 0$.

Para que Π_1 pase por P, se debe tener además que $3 \cdot 2 - 1 + 3 + D = 0$, por lo que $D = -8$ y la ecuación de Π_1 es finalmente

$$3x - y + z - 8 = 0.$$

(b) Ahora queremos encontrar la ecuación vectorial del plano Π_2 paralelo a L y que pasa por P y Q.

Para que Π_2 y L sean paralelos, un vector director de Π_2 debe ser proporcional a $\overrightarrow{v}$. Además, para que Π_2 pase por P y Q, el vector $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ debe estar en Π_2.

Sea
$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (2, 1, 3) - (2, 3, -1) = (0, -2, 4).$$

Si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes, los podemos usar como vectores directores del plano Π_2. Verifiquemos entonces que no existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$0 = \overrightarrow{v} - \lambda\overrightarrow{w} = (3, -1, 1) - \lambda(0, -2, 4) = (3, -1 - 2\lambda, 1 - 4\lambda).$$

Por la igualdad de las segundas componentes $\lambda = -\frac{1}{2}$, pero de la igualdad entre las terceras componentes $\lambda = \frac{1}{4}$, por lo que no existe λ y podemos concluir que $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes.

Finalmente, la ecuación vectorial del plano Π_2, que pasa por P y tiene vectores directores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$, es

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) + t(3, -1, 1) + s(0, -2, 4), \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

3. Sea $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector de $\mathbb{R}^3$.

La primera condición $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2}$, nos dice que

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 2. \tag{2}$$

La segunda condición, $\overrightarrow{v} \perp (1, 0, 1)$, nos dice que

$$\langle (v_1, v_2, v_3), (1, 0, 1) \rangle = v_1 + v_3 = 0. \tag{3}$$

La tercera condición nos dice que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\langle \overrightarrow{v}, (-1, -1, 0) \rangle}{\|\overrightarrow{v}\| \, \|(-1, -1, 0)\|}.$$

Calculando
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-v_1 - v_2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}},$$

que nos da la ecuación
$$v_1 + v_2 = -\sqrt{3}. \tag{4}$$

El sistema de ecuaciones lineales formado por las ecuaciones (3) y (4)

$$\begin{cases} v_1 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones, dadas por

$$(v_1, v_2, v_3) = (t, -\sqrt{3} - t, -t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Debemos buscar cuales de ellas verifican la ecuación (2).

$$2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = t^2 + (\sqrt{3} + t)^2 + t^2 = 3t^2 + 2\sqrt{3}t + 3$$

que es equivalente a

$$3t^2 + 2\sqrt{3}t + 1 = 0,$$

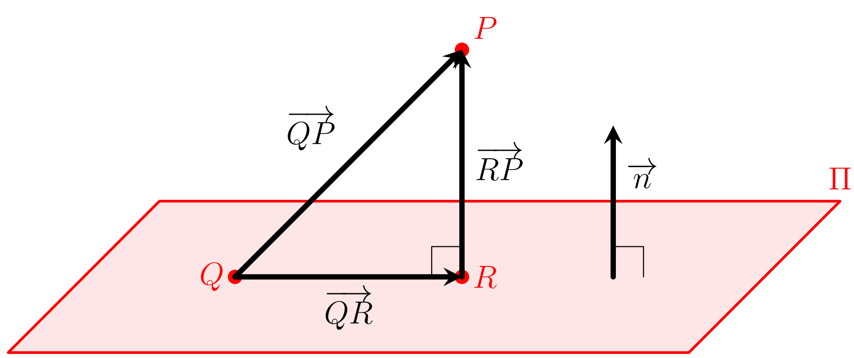
cuyas raíces son

$$t = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por lo tanto

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

4. (a) Hagamos un dibujo



Sea R el punto de intersección del plano Π con la recta que pasa por P y con vector director $\overrightarrow{n}$. La distancia entre P y Π es la norma del vector $\overrightarrow{RP}$, pero $\overrightarrow{RP}$ es la proyección ortogonal de $\overrightarrow{QP}$ en la dirección de $\overrightarrow{n}$, por lo que

$$d(P, \Pi) = \left\|\overrightarrow{RP}\right\| = \left\|\pi_{\overrightarrow{n}}(\overrightarrow{QP})\right\| = \left|\text{proy esc}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{QP}\right| = \left|\text{proy esc}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{PQ}\right|.$$

(b) Encuentre la distancia entre el punto $P(0, 3, -3)$ y el plano $\Pi : x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Por la parte anterior sabemos que

$$d(P, \Pi) = \left|\text{proy esc}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{PQ}\right| = \frac{\left|\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{n} \rangle\right|}{\|\overrightarrow{n}\|} \tag{5}$$

El punto P no pertenece a Π ya que

$$0 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) - 6 = -6 + 6 - 6 = -6 \neq 0.$$

Para calcular la distancia entre P y Π siguiendo la fórmula encontrada, necesitaremos

$$\overrightarrow{n} = (1, -2, -2),$$

y un punto $Q \in \Pi$. Vamos a tomar $Q(6, 0, 0)$. Luego

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (6, -3, 3).$$

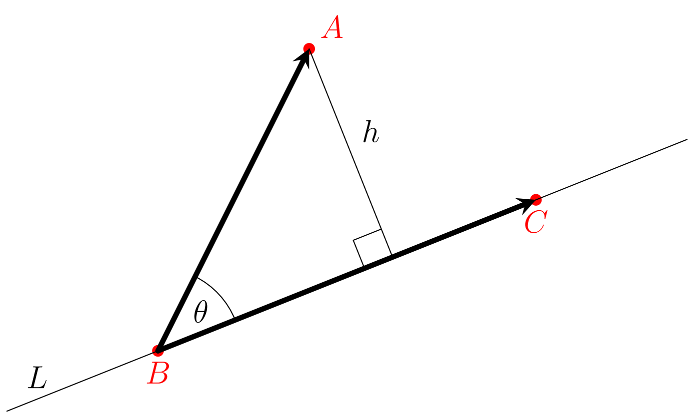
Reemplazando en (5) nos queda

$$d(P, \Pi) = \frac{|\langle (6, -3, 3), (1, -2, -2) \rangle|}{\sqrt{\langle (1, -2, -2), (1, -2, -2) \rangle}} = \frac{|6 + 6 - 6|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{9}}$$

por lo tanto

$$d(P, \Pi) = 2.$$

5. Hagamos un dibujo



La distancia entre A y L es la altura del paralelepípedo de lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. Si denotamos θ al ángulo entre $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, esa altura es

$$h = \left\| \overrightarrow{BA} \right\| \sin(\theta)$$

Por un teorema visto en clases

$$\left\| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} \right\| = \left\| \overrightarrow{BC} \right\| \left\| \overrightarrow{BA} \right\| \sin(\theta)$$

por lo que

$$d(A, L) = h = \left\| \overrightarrow{BA} \right\| \sin(\theta) = \frac{\left\| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} \right\|}{\left\| \overrightarrow{BC} \right\|}.$$