

Guia Prueba 2 analisis abstracto I

20 de Octubre 2023

Puede asumir la desigualdad de Holder para espacios ℓ^p

Pregunta 1

Sea $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funcion absolutamente continua y $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ una funcion absolutamente continua y estrictamente monotona. Demostrar que $f \circ g$ es una funcion absolutamente continua.

Pregunta 2

Sea $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funcion Lipschitz y $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ una funcion absolutamente continua. Demostrar que $f \circ g$ es una funcion absolutamente continua.

Pregunta 3

Sea f una funcion absolutamente continua.

1. Demuestre que si E es un conjunto de medida 0 entonces $f(E)$ es un conjunto de medida 0.
2. Demuestre que si E es un conjunto de medible entonces $f(E)$ es un conjunto de medible.

Pregunta 4

Sean $1 \leq r < s < \infty$ y f una funcion medible tal que $f \in L^p$ para todo $p \in (r, s)$. Definimos la función

$$\phi(p) = \|f\|_p^p. \quad (1)$$

en el intervalo (r, s)

1. Demuestre que ϕ es una función continua.
2. Demuestre que ϕ es una funcion logaritmicamente convexa, esto es, demuestre que para todo $p_1, p_2 \in (r, s)$ y $t \in [0, 1]$ se cumple que

$$\log \circ \phi(tp_1 + (1-t)p_2) \leq t \log \circ \phi(p_1) + (1-t) \log \circ \phi(p_2) \quad (2)$$

Sugerencia: Holder.

Pregunta 5

Sea $f \in L^\infty$. Demuestre que $f \in L^p$ para todo $p \geq 1$ y que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \quad (3)$$

Pregunta 6

Dado $1 \leq p < \infty$, q el conjugado de p y $f \in L^p$, demuestre que

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L^q, \|g\|_q \leq 1} \int_0^1 fg \quad (4)$$

Pregunta 7

Demuestre que el espacio de sucesiones ℓ^∞ con la norma $\|\cdot\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ es completo.

Pregunta 8

Demuestre que si $1 \leq p \leq r < \infty$ entonces $\ell^p \subset \ell^r$

Pregunta 9

Considere el espacio

$$\ell^3 = \{\text{sucesiones } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^3 < \infty\} \quad (5)$$

con la norma

$$\|(x_n)\|_w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^{\frac{20}{21}}}. \quad (6)$$

Demuestre que ℓ^3 no es completo con esta norma.

Pregunta 10

Demuestre que el espacio

$$\ell^w \{\text{sucesiones } (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^{\frac{20}{21}}} < \infty\} \quad (7)$$

si es completo con la norma $\|\cdot\|_w$ definida en el ejercicio anterior.

Pregunta 11

Demuestre que el conjunto c_{00} no es denso en ℓ^∞ .

Pregunta 12

Demuestre que, para p y q conjugados, el espacio ℓ^q es una representación de los funcionales lineales acotados en ℓ^p . Esto es, demuestre que para cada $b = (b_n) \in \ell^q$ podemos definir un funcional lineal acotado F_b en tal que

$$\|F_b\| = \|b\|_q \quad (8)$$

y para todo funcional lineal acotado F en ℓ^p existe $b = (b_n) \in \ell^q$ tal que $F = F_b$.

Sugerencia: Para demostrar este resultado, demuestre primero las siguientes afirmaciones

1. Para cada $b = (b_n) \in \ell^q$ podemos definir en ℓ^q el funcional lineal acotado

$$F_b((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (9)$$

para el cual $\|F_b\| = \|b\|_q$.

2. El conjunto $c_{00} = \{\text{sucesiones } (x_n) : \text{Existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0 \text{ para } n \geq N\}$ es denso en ℓ^p .
3. Demostrar que todo funcional lineal acotado es continuo.

y use estas afirmaciones para demostrar que si F es un funcional lineal acotado y definimos $e_n = (\delta_{ni})_{i \in \mathbb{N}} \in c_{00}$ entonces

$$F((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F(e_n) \quad (10)$$

y $(F(e_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$

Pregunta 13

Encuentre una representación de los fucionales lineales acotados en el espacio

$$c_0 = \{ \text{sucesiones } (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \} \quad (11)$$

con la norma $\| \cdot \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Pregunta 14

Encuentre una representación de los fucionales lineales acotados en el espacio

$$c = \{ \text{sucesiones } (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ existe y es finito} \} \quad (12)$$

con la norma $\| \cdot \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Observación: En este caso, los funcionales

$$F_b$$

se definen de manera diferente a los anteriores, pues es necesarion incluir $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Puede ser util notar que si $(x_n) \in c$ entonces $(x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \in c_0$.