Analisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Profesor: Manuel Pinto J.
Ayudante: Juan Peña

# Tarea 6 analisis abstracto I

11 de Noviembre 2023

**Nota:** $\frac{\textbf{Puntos}}{4} + 1$
**Fecha de entrega: Viernes 25 de Noviembre**
Todas las respuestas deben ser justificadas

## Pregunta 1(6 puntos cada parte)

Sea $1 \leq p < \infty$ y $w(x) = x$. En el espacio $L^p$ definimos la norma

$$\|f\|_w = (\int_0^1 w(x)|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

1. Demostrar que el espacio $L^p$ usual no es completo si usamos la norma $\|\cdot\|_w$.
2. Definimos un nuevo espacio vectorial,

$$L^p(w) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ medible: } \int_0^1 w(x)|f(x)|^p dx < \infty\}, \tag{1}$$

   con la relacion de equivalencia $f \sim g$ si $f = g$ en casi todas partes.

   Demostrar que este espacio si es completo con la norma $\|\cdot\|_w$.

## Pregunta 2(6 puntos)

Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $t \in (0,1)$. Determinar los valores de $\lambda$ tal que para toda funcion $f \in L^p$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^\lambda} \int_0^t f(x)dx = 0$$

y para cuales valores de $\lambda$ existen funciones $f \in L^p$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^\lambda} \int_0^t f(x)dx \neq 0$$

## Pregunta 3(6 puntos)

Dado $1 \leq p < \infty$ sea $f_n$ una sucesión de funciones que converge en $L^p$ a una función $f$. Sea $g_n$ una sucesión de funciones medibles tal que $|g_n| < M$ para algun $M > 0$ y $g_n$ converge puntualmente a una funcion $g$ en casi todas partes. Demostrar que $g_n f_n$ converge a $gf$ en $L^p$.