Analisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Profesor: Manuel Pinto J.
Ayudante: Juan Peña

Guia Prueba 2 analisis abstracto I

20 de Octubre 2023

Pregunta 1

Calcule los siguientes limites

1. $$\lim_{n\to\infty}\int_1^n (1-\frac{t}{n})^n \log t$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(\frac{x}{n})}{(1+\frac{x}{n})^n}$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nt^2}{(1+t^2)^n}$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$$

5. $$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{(1+nx^2)}$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\log(x+n)}{ne^x}\cos(x)dx$$

Pregunta 2

Sea f una funcion no negativa e integrable en el intervalo $(0,\infty)$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx = 0 \tag{1}$$

Pregunta 3

Demuestre que no existe una funcion integrable g tal que

$$|\frac{n}{1+(nx)^2}| \leq g(x) \tag{2}$$

para todo natural n y $x \in [0,\infty)$.

Sugerencia: Demuestre que la conclusion del teorema de convergencia dominada no se cumple.

Pregunta 4

Sea $f : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una funcion tal que $f_t(x) = f(x,t)$ es una funcion integrable en $\mathbb{R}$ para todo $t \in [a,b]$. Sea $F(t) = \int f(x,t)dx$.

1. Demostrar que si existe una funcion g integrable tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$ para todo par (x,t) y $f_x(t) = f(x,t)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces F es una funcion continua.
2. Demostrar que si $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe en todo el dominio de f y existe una funcion g integrable tal que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g(x)$ entonces F es diferenciable y
$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx \tag{3}$$

Ayuda: Un limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y solo si para cada sucesion $x_n \to a$ los limites $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existen y son iguales.

Pregunta 5

Use la pregunta anterior para obtener las siguientes identidades:

1. Derive la ecuacion
$$\int_0^\infty e^{-tx}dx = \frac{1}{t} \tag{4}$$
y use esto para demostrar
$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n! \tag{5}$$
para todo natural n.
2. Derive la ecuacion
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-tx^2}dx = (\frac{\pi}{t})^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$
y use esto para demostrar
$$\int_{-\infty}^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx = \frac{(2n)!\pi^{\frac{1}{2}}}{4^n n!} \tag{7}$$
para todo natural n.

Pregunta 6

Demuestre las siguientes identidades. Para hacer esto, escriba parte del integrando como serie y use las identidades demostradas en el ejercicio anterior

1. Para $a > 0$
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos(ax)dx = \pi^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-a^2}{4}} \tag{8}$$
2. Para $a > 1$
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{e^{ax}x}dx = \arctan(a^{-1}) \tag{9}$$

Pregunta 7

Sea f_n una sucesion de funciones medibles tal que $|f_n| < M$. Si f_n converge a f en medida entonces $|f| \leq M$.

Ayuda: Si una sucesion f_n converge en medida a f, existe una subsucesion f_{n_k} que converge puntualmente a f en casi todas partes.

Pregunta 8

Demuestre que si f_n converge a f en medida, entonces f_n^2 converge a f^2 en medida.

Pregunta 9

Sea f_n una sucesion que converge en medida a f en el intervalo $[a, b]$. Demostrar la identidad

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sin(f_n(x))dx = \int_a^b \sin(f(x))dx \tag{10}$$

Sugerencia: Use el teorema de convergencia dominada para convergencia en medida.