Analisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Profesor: Manuel Pinto J.
Ayudante: Juan Peña

Tarea 5 analisis abstracto I

20 de Octubre 2023

Nota: $\frac{\textbf{Puntos}}{4} + 1$
Fecha de entrega: Viernes 10 de Noviembre
Todas las respuestas deben ser justificadas

Pregunta 1(3 puntos cada parte)

Sea g una funcion creciente y absolutamente continua en $[a, b]$ con $g(a) = c$ y $g(b) = d$.

1. Demuestre que para todo abierto $O \subset [c, d]$
$$m(O) = \int_{g^{-1}(O)} g'(x)dx \tag{1}$$
2. Sea $H = \{x \in [a, b] : g(x) \neq 0\}$. Demuestre que si $E \subset [c, d]$ es un conjunto tal que $m(E) = 0$, entonces $g^{-1}(E) \cap H$ tiene medida 0.
3. Sea $E \subset [c, d]$ medible. Demuestre que $F = g^{-1}(E) \cap H$ es medible y
$$m(E) = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x))g'(x)dx \tag{2}$$
4. Si f es una funcion medible y no negative en $[c, d]$ entonces $(f \circ g)g'$ es medible en $[a, b]$ y
$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx. \tag{3}$$

Pregunta 2(6 puntos)

Demuestre que la funcion
$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x^\beta}) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \tag{4}$$
con parametros reales $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tiene variacion acotada en $[0, 1]$ si y solo $\alpha > \beta$.

Pregunta 3(6 puntos)

Sea f una funcion absolutamente continua en $[a, b]$. Demostrar que f el la diferencia de dos funciones corecientes y absolutamente continuas.