Analisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Profesor: Manuel Pinto J.
Ayudante: Juan Peña

Tarea 4 analisis abstracto I

6 de Octubre 2023

Nota: $\frac{\textbf{Puntos}}{3} + 1$
Fecha de entrega: Viernes 20 de Octubre
Todas las respuestas deben ser justificadas

Pregunta 1(4 puntos)

Demuestre la identidad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{e^x - 1}$$

Para $a > 1$.

Pregunta 2(4 puntos)

Dada una funcion integrable f sea

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt \tag{1}$$

Demostrar que F es acotada y continua. ¿Es F una funcion integrable?

Pregunta 3(4 puntos)

Demostrar la siguiente afirmacion

Si f_n es una sucesion de funciones medibles que converge puntualmente a una funcion f en casi todas partes en un conjunto medible E y existe una funcion integrable g tal que $|f_n| < g$ entonces dado $\nu > 0$ existe un subconjunto medible $A \subset E$ tal que $m(A) < \nu$ y f_n converge uniformemente a f en $E - A$.

Pregunta 4(4 puntos)

Sea E un conjunto medible tal que $m(E) < \infty$ y sea f_n una sucesion de funciones medibles tal que f_n converge a f en medida. Demuestre que se g es medible y finita en casi todas partes entonces la sucesion $f_n g$ converge a fg en medida.

Sugerencia: Demuestre primero el caso en que g es una funcion simple.