Matemáticas II BA BT LQ

Sergio Muñoz

F. Ciencias, UChile

25 septiembre 2023

Clase 25 septiembre

Objetivos

- Propiedades de funciones continuas
- Ejemplo del Teorema del Valor Intermedio (TVI)
- Ejercicios con TVI
- Más ejercicios con TVI
- Teorema del Valor Medio (TVM)
- TVM y crecimiento

Propiedades de funciones continuas

- **Definición** Máximo de una función f en un conjunto A es, si existe, un número $f(q)$ donde $q \in A$ y se cumple que para cualquier $x \in A$ se cumple $f(q) \geq f(x)$ o abreviando $\forall x \in A\ (f(q) \geq f(x)\ )$ El máximo en q vale $f(q)$

Propiedades de funciones continuas

- **Definición** Máximo de una función f en un conjunto A es, si existe, un número $f(q)$ donde $q \in A$ y se cumple que para cualquier $x \in A$ se cumple $f(q) \geq f(x)$ o abreviando $\forall x \in A\ (f(q) \geq f(x)\ )$ El máximo en q vale $f(q)$
- **Definición** Mínimo de una función en un conjunto A es, si existe, un número $f(p)$ donde $p \in A$ y cumple que para cualquier $x \in A$ se cumple $f(p) \leq f(x)$ o abreviando $\forall x \in A\ (f(p) \leq f(x))$. El mínimo en p vale $f(p)$

Propiedades de funciones continuas

- **Definición** Máximo de una función f en un conjunto A es, si existe, un número $f(q)$ donde $q \in A$ y se cumple que para cualquier $x \in A$ se cumple $f(q) \geq f(x)$ o abreviando $\forall x \in A \ (f(q) \geq f(x)\ )$ El máximo en q vale $f(q)$
- **Definición** Mínimo de una función en un conjunto A es, si existe, un número $f(p)$ donde $p \in A$ y cumple que para cualquier $x \in A$ se cumple $f(p) \leq f(x)$ o abreviando $\forall x \in A \ (f(p) \leq f(x))$. El mínimo en p vale $f(p)$
- **Teorema de máximos y mínimos de funciones continuas:** una función que es continua en cada punto de un intervalo cerrado alcanza un máximo y un mínimo en él.

Propiedades de funciones continuas

- **Teorema de máximos y mínimos de funciones continuas:** una función que es continua en cada punto de un intervalo cerrado alcanza un máximo y un mínimo en él.
- **Teorema del Valor Intermedio (TVI):** una función continua en un intervalo cumple que cualquier número entre dos imágenes de puntos del intervalo debe ser imagen de alguien entre esos puntos.

Propiedades de funciones continuas

- **Teorema de máximos y mínimos de funciones continuas:** una función que es continua en cada punto de un intervalo cerrado alcanza un máximo y un mínimo en él.
- **Teorema del Valor Intermedio (TVI):** una función continua en un intervalo cumple que cualquier número entre dos imágenes de puntos del intervalo debe ser imagen de alguien entre esos puntos.
- Entre ambos teoremas dicen que la gráfica de una función continua en intervalo es como un cable, sin cortes, con sus bordes incluidos, y con alturas claras y definidas.

Ejemplo del Teorema del Valor Intermedio

Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^6 - 3x - 1$ corta al eje horizontal en un punto del intervalo $[-1, 0]$ (tiene una *raíz* en ese intervalo)

Ejemplo del Teorema del Valor Intermedio

Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^6 - 3x - 1$ corta al eje horizontal en un punto del intervalo $[-1, 0]$

Respuesta

- La función es continua ya que es polinomio.

Ejemplo del Teorema del Valor Intermedio

Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^6 - 3x - 1$ corta al eje horizontal en un punto del intervalo $[-1, 0]$

Respuesta

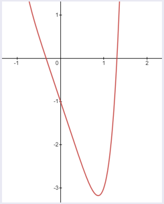
- La función es continua ya que es polinomio.
- Notemos que $f(-1) = 3 > 0$ y que $f(0) = -1 < 0$

Ejemplo del Teorema del Valor Intermedio

Demuestre que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=x^6-3x-1$ corta al eje horizontal en un punto del intervalo $[-1,0]$

Respuesta

- La función es continua ya que es polinomio.
- Notemos que $f(-1)=3>0$ y que $f(0)=-1<0$
- Luego, por Teorema del Valor Intermedio, existe $c\in\,]-1,0[$ con $f(c)=0$ ya que $-1<0<3$, o mejor dicho, $f(0)<0<f(-1)$ con f continua en $[-1,0]$. Note que $]-1,0[\subseteq[-1,0]$

Ver en Desmos 

Ejercicios con TVI

- Demuestre que $f(x) = x^5 - 3x + 1$ tiene una *raíz* en $[-2, 4]$ (es decir, existe $c \in]-2, 4[$ con $f(c) = 0$)
- Demuestre que la ecuación $\cos(x) = x$ se cumple para algún valor de x
- Demuestre que si la velocidad de un vehículo es continua y la velocidad promedio en un tramo son 100 kilómetros por hora, entonces el vehículo debe haber tenido esa velocidad instantánea al menos una vez en ese trayecto.

Ejercicios con TVI

1. Asegure la existencia de una solución, en el intervalo $]1,2[$, de la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$
2. Asegure la existencia de una solución de $x^3 + 3x - 2 = 0$ en $]0,1[$.
3. Asegure la existencia de, al menos, una solución real de $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$.
4. Determine la veracidad de la siguiente afirmación:

   "Si f es continua en $[0,1]$ y cumple $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, entonces existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$ (es decir, f tiene un punto fijo)".

5. Demuestre que cada una de las ecuaciones siguientes tiene al menos una solución real.

   1. $x^3 - 3x + 1 = 0$
   2. $x^2 = \sqrt{x+1}$
   3. $\cos(x) = x$

Teorema del Valor Medio (TVM)

Teorema del Valor Medio (TVM)

Teorema del Valor Medio (TVM): Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en su interior $]a, b[$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que

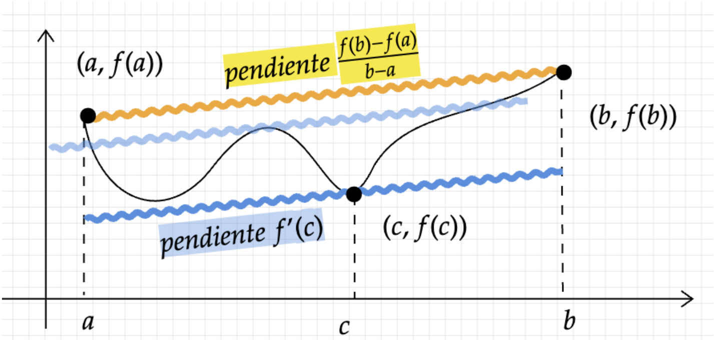
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema del Valor Medio (TVM)

Teorema del Valor Medio (TVM)

Teorema del Valor Medio (TVM): Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en su interior $]a, b[$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Ejemplo con Teorema del Valor Medio (TVM)

Ejemplo

Demuestre que la función tangente posee un punto de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ en el que su derivada vale $\frac{4}{\pi}$.

Ejemplo con Teorema del Valor Medio (TVM)

Ejemplo

Demuestre que la función tangente posee un punto de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ en el que su derivada vale $\frac{4}{\pi}$.

Respuesta

Note que tangente es continua en cada intervalo completamente contenido en su dominio, en particular en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Ejemplo con Teorema del Valor Medio (TVM)

Ejemplo

Demuestre que la función tangente posee un punto de $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ en el que su derivada vale $\dfrac{4}{\pi}$.

Respuesta

Note que tangente es continua en cada intervalo completamente contenido en su dominio, en particular en $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Además tangente es derivable en cada intervalo completamente contenido en su dominio, en particular en $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

Ejemplo con Teorema del Valor Medio (TVM)

Ejemplo

Demuestre que la función tangente posee un punto de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ en el que su derivada vale $\frac{4}{\pi}$.

Respuesta

Tangente es continua en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y derivable en $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Ejemplo con Teorema del Valor Medio (TVM)

Ejemplo

Demuestre que la función tangente posee un punto de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ en el que su derivada vale $\frac{4}{\pi}$.

Respuesta

Tangente es continua en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y derivable en $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Se cumplen las hipótesis que pide TVM, por lo que se garantiza su conclusión:

Ejemplo con Teorema del Valor Medio (TVM)

Ejemplo

Demuestre que la función tangente posee un punto de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ en el que su derivada vale $\frac{4}{\pi}$.

Respuesta

Tangente es continua en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y derivable en $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Se cumplen las hipótesis que pide TVM, por lo que se garantiza su conclusión: existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ tal que

$$(\tan)'(c) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0)}{\frac{\pi}{4} - 0} = \frac{1-0}{\frac{\pi}{4} - 0} = \frac{4}{\pi}$$

TVM y crecimiento

Crecimiento

- Que f sea **creciente** en J significa que para $x, z \in J$ si $x < z$ entonces $f(x) < f(z)$ o visualmente $\nearrow$

TVM y crecimiento

Crecimiento

- Que f sea **creciente** en J significa que para $x, z \in J$ si $x < z$ entonces $f(x) < f(z)$ o visualmente $\nearrow$
- Que f sea **decreciente** en J significa que para $x, z \in J$ si $x < z$ entonces $f(x) > f(z)$ o visualmente $\searrow$

TVM y crecimiento

Crecimiento

- Que f sea **creciente** en J significa que para $x, z \in J$ si $x < z$ entonces $f(x) < f(z)$ o visualmente $\nearrow$
- Que f sea **decreciente** en J significa que para $x, z \in J$ si $x < z$ entonces $f(x) > f(z)$ o visualmente $\searrow$

TVM y crecimiento

- Si f es derivable en un intervalo J y la derivada de f es positiva en cada punto de J, entonces f es creciente en J

Demostración (en pizarra)

TVM y crecimiento

Crecimiento

- Que f sea **creciente** en J significa que para $x, z \in J$ si $x < z$ entonces $f(x) < f(z)$ o visualmente $\nearrow$
- Que f sea **decreciente** en J significa que para $x, z \in J$ si $x < z$ entonces $f(x) > f(z)$ o visualmente $\searrow$

TVM y crecimiento

- Si f es derivable en un intervalo J y la derivada de f es positiva en cada punto de J, entonces f es creciente en J
- Si f es derivable en un intervalo J y la derivada de f es negativa en cada punto de J, entonces f es decreciente en J

Demostración $\boxed{\text{(en pizarra)}}$