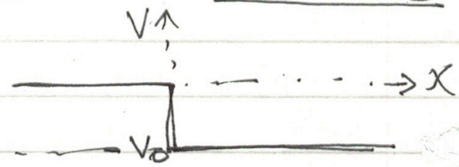
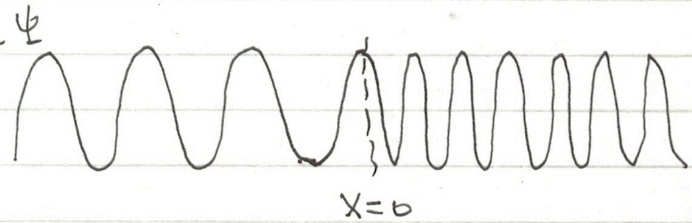
condiciones de borde..

pedimos que Ψ sea finita. Luego si E y V son finitos, ψ'' existe $\Rightarrow$ $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ y Ψ son continuas.
(aun si V es discontinuo)

Ejemplo: $V = \begin{cases} 0 & x<0 \\ -V_0 & x>0 \end{cases}$





$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}} \qquad (6)$$

$$\Psi(x,t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\,\psi(x) \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) \qquad (8)$$

$x<0$: $\quad E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' \Rightarrow \psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$

o sea $\quad \psi'' + k_1^2\psi = 0 \Rightarrow \psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \qquad (9)$

$x>0$: $\quad E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - V_0\psi \Rightarrow \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)\psi = 0$

o sea, $\quad \psi'' + k_2^2\psi = 0 \Rightarrow \psi(x) = C\,e^{ik_2x} \qquad (10)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{cont. de } \psi: & A + B = C \\ \text{cont. de } \psi': & ik_1A - ik_1B = ik_2C \end{array}\right\} (11)$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad ; \quad \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

Coefics. de transmisión y reflexión:

Intensidad incidente $\longrightarrow$

intensidad trasmitida $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ intensidad reflejada

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi} = \hbar k$$

$p = mv \quad \therefore mv = \hbar k$

$$\boxed{v = \hbar k / m}$$

densidad de numero

velocidad

$$\text{Intensidad} = \rho v = |\psi|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

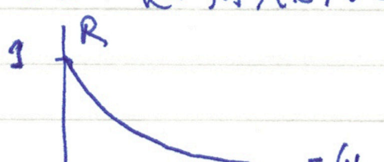
Reflexión: $$R = \frac{|B|^2 (\hbar/m) k_1}{|A|^2 (\hbar/m) k_1} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \quad (12)$$

Transmisión: $$T = \frac{|C|^2 (\hbar/m) k_2}{|A|^2 (\hbar/m) k_1} = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1} = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (13)$$

y se cumple, $\boxed{R + T = 1}$ (14)

siendo $k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ y $k_2 = \sqrt{(2m/\hbar^2)(E + V_0)}$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E + V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E + V_0}}\right)^2$$



No ∃ cuantización de E.

$$T = \frac{4\sqrt{E}\sqrt{E + V_0}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E + V_0})^2}$$

Paridad de las soluciones

Cuando $V(x)$ es par, i.e., $V(-x) = V(x)$, las autofn. poseen paridad definida, o sea son pares ó impares.

Dem: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad (1)$$

$x \Rightarrow -x$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + V(-x)\psi(-x) = E\psi(-x) \qquad (2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + V(x)\psi(-x) = E\psi(-x) \qquad (3)$$

o sea, $\psi(x)$ y $\psi(-x)$ satisfacen la misma ecuación y dado que sólo $\exists$ una autofunción para un E dado,

$$\Rightarrow \quad \psi(-x) = c\,\psi(x) \qquad (4)$$

en particular, para $-x$, (4) queda

$$\psi(x) = c\,\psi(-x) = c^2\psi(x) \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(-x) = \pm\psi(x)}$$

Si $\psi(-x) = \psi(x) \rightarrow \psi(x)$ es PAR

Si $\psi(-x) = -\psi(x) \rightarrow \psi(x)$ es IMPAR

Numerical Integration of the S. eqn

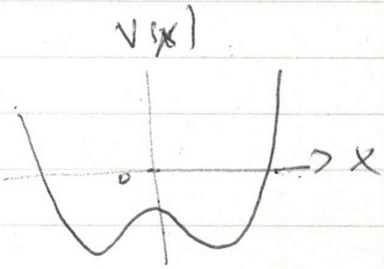
Caso simple: $V(-x) = V(x)$ (1)

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)\,\psi(x) \qquad (2)$$

Método primitivo:

$$\psi(x+\Delta x) \simeq \psi(x) + \Delta x\,\psi'(x) + O(\Delta x)^2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \psi'(x+\Delta x) \simeq \psi'(x) + \Delta x\,\psi''(x) + O(\Delta x)^2 \qquad (4)$$



$x_1 = x_0 + \Delta x$; $x_2 = x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x$.

$$\psi(x_1) \simeq \psi(x_0) + \Delta x\,\psi'(x_0)$$

$$\psi'(x_1) \simeq \psi'(x_0) + \Delta x\,\psi''(x_0)$$

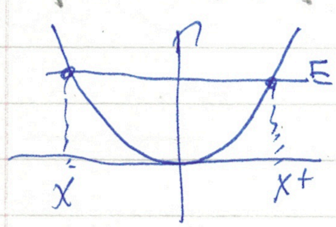
$$\stackrel{(2)}{=} \psi'(x_0) + \frac{2m}{\hbar^2}\Delta x\,(V(x_0) - E)\,\psi(x_0) \qquad (5)$$

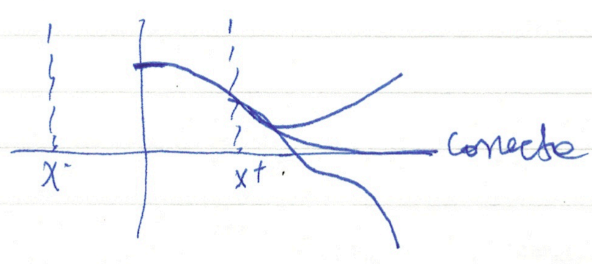
$x_0 = 0$, y $\psi(0)$ dado, $\psi'(0)$ ", integra desde $x_0 = 0$ hasta x_f.

Para E dado

También usar Taylor de orden superior

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x)$$





Autofunciones & Autovalores

tiene el aspecto $\frac{\check{p}^2}{2m}$ con $\check{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\,\psi(x)$$

tiene la forma:

operador x función = número x función

$$\boxed{\check{H}\,\psi = E\,\psi}$$

operador   autofunción   autovalor

ej.: El operador $\check{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ tiene como autofn. e $\psi = e^{ikx}$ ya que

$$\check{p}_x\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}e^{ikx} = \hbar k\, e^{ikx} = \hbar k\,\psi$$

o sea el autovalor de $\check{p}_x$ es $\hbar k$.

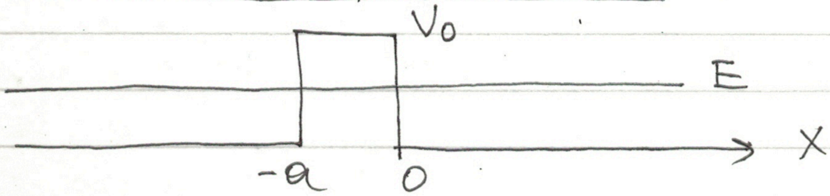
Consideremos $\check{L}_z = x p_y - y p_x = x(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial y} - y(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}$

op. de momento angular $= i\hbar\left[y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right]$

Postulado 1: Cualq. variable dinámica que describe el movimiento de una partícula puede ser representada por un operador. Las ~~cantidades~~ entidades observables son representadas por operadores hermíticos (autovalores reales)

Postulado 2: El único resultado posible de la medición de una variable dinámica es uno de los autovalores del correspondiente operador. Después de la medición, el sist. queda en el estado que corresponde al autovalor medido.

Penetración de barrera

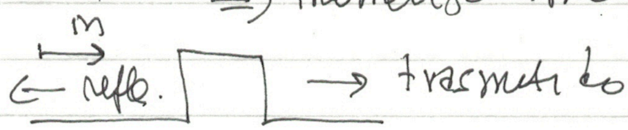


clásico/. La partícula NO puede pasar si $E < V_0$:

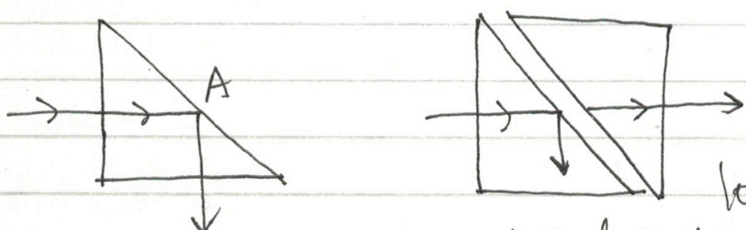
$$E = \frac{p^2}{2m} + V \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = E - V < 0$$ dentro de la barrera

$\Rightarrow$ momento imaginario!. $\exists$

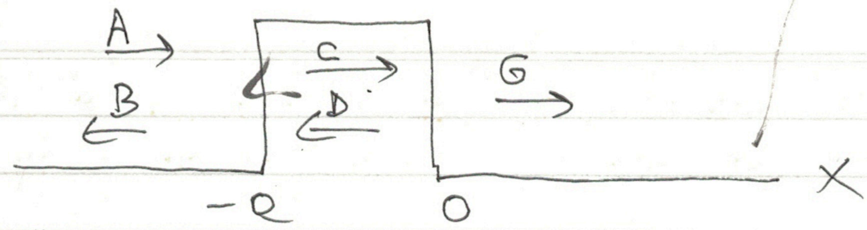
Cuánticamente:



óptica: reflexión total interna:



los prismas se acoplan por los campos <u>evanescentes</u>



$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$u = Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \qquad x<-a$$

$$u = Ce^{\alpha x}+De^{-\alpha x} \qquad -a<x<0 \qquad \alpha=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

$$u = Ge^{ikx} \qquad x>0$$

Cont. en $x=0$;

u: $C+D=G$

u': $\alpha(C-D)=ikG$

cont. en $x=-a$

$$Ae^{-ika}+Be^{ika}=Ce^{-\alpha a}+De^{\alpha a}$$

$$ik(Ae^{-ika}-Be^{ika})=\alpha(Ce^{-\alpha a}-De^{\alpha a})$$

$$\alpha C+\alpha D=\alpha G$$
$$\alpha C-\alpha D=ikG$$

$$2\alpha D=(\alpha-ik)G$$

$$\Rightarrow 2\alpha C=(\alpha+ik)G$$

$$C=\frac{(\alpha+ik)}{2\alpha}G \qquad D=\frac{(\alpha-ik)G}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow Ce^{-\alpha a}+De^{\alpha a}=\left[\left(\frac{\alpha+ik}{2\alpha}\right)e^{-\alpha a}+\left(\frac{\alpha-ik}{2\alpha}\right)e^{\alpha a}\right]G=\left[\cosh(\alpha a)-\frac{ik}{\alpha}\sinh(\alpha a)\right]G$$

$$\text{y} \quad Ce^{-\alpha a}-De^{\alpha a}=\left[\left(\frac{\alpha+ik}{2\alpha}\right)e^{-\alpha a}-\left(\frac{\alpha-ik}{2\alpha}\right)e^{\alpha a}\right]G=\left[\frac{ik}{\alpha}\cosh(\alpha a)-\sinh(\alpha a)\right]G$$

$$Ae^{-ika}+Be^{ika}=G\left[\cosh(\alpha a)-\frac{ik}{\alpha}\sinh(\alpha a)\right]$$

$$Ae^{-ika}-Be^{ika}=G\frac{\alpha}{ik}\left[\frac{ik}{\alpha}\cosh(\alpha a)-\sinh(\alpha a)\right]$$
$$=G\left[\cosh(\alpha a)-\frac{\alpha}{ik}\sinh(\alpha a)\right]$$

next: Despejo B/A (relac. con el coefic. de reflexión)