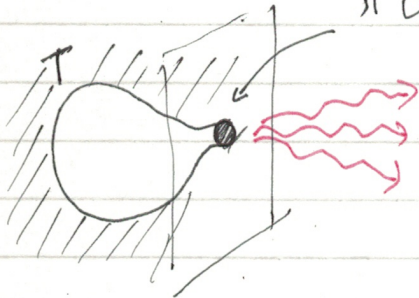


La catástrofe Ultravioleta



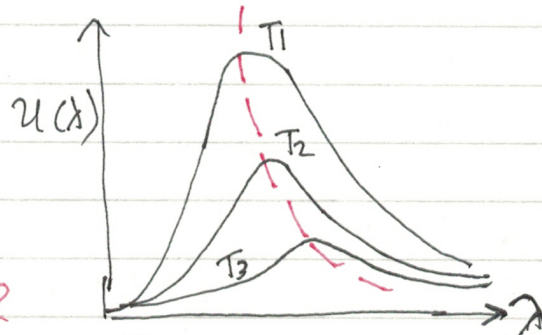
cavidad metálica con paredes a temperatura $T \rightarrow$ radiación e.m. llena la cavidad



"cuerpo negro"

radiación de cuerpo negro.

obs. experimental:

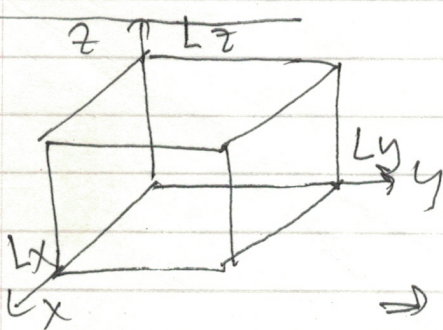


$$\lambda_{\max} = \frac{\text{cte.}}{T}$$

Ley de Wien (1893)

Teo. clásica de Rayleigh-Jeans

Cavidad cúbica:



$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$k^2 \equiv (\omega/c)^2 \quad (3)$$

$$\nabla^2 \vec{E} + K^2 \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2 E_i + K^2 E_i = 0 \quad i = x, y, z$$

$$i = x: \nabla^2 E_x(x, y, z) + K^2 E_x(x, y, z) = 0$$

Separacion de variables: $E_x(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$\Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' + K^2 XYZ = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{dep. de } x} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{\text{dep. de } y} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\text{dep. de } z} + K^2 = 0$$



$$X'' + K_x^2 X = 0$$

$$Y'' + K_y^2 Y = 0$$

$$Z'' + K_z^2 Z = 0$$

$$\text{con } K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = K^2$$

condic. de borde: $E_x(x, y, z) = 0$ en $y = L_y$; $y = 0$
 $z = 0$; $z = L_z$

$$\Rightarrow X(x) = \cos(K_x x)$$

$$Y(y) = \sin(K_y y)$$

$$Z(z) = \sin(K_z z)$$

$$\downarrow$$

$$K_y L_y = n_y \pi$$

$$K_z L_z = n_z \pi$$

$$\Rightarrow E_x(x, y, z) = A \cos(K_x x) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right)$$

Análogamente,

debe ser igual a $\frac{n_x \pi}{L_x}$

$$E_y(x, y, z) = B \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right)$$

que satisface: $E_y = 0$ en $x = 0$ y $x = L_x$
 $z = 0$ y $z = L_z$

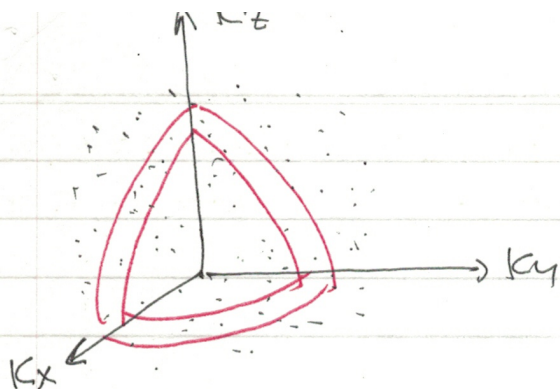
Finalmente, $E_z(x,y,z) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right)$

que cumple: $E_z = 0$ en $x=0 \wedge x=L_x$
 $y=0 \wedge y=L_y$

Aplicación de $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

$\Rightarrow A n_x + B n_y + C n_z = 0 \rightarrow$ quedan 2 cts. libres
 $\rightarrow$ 2 modos l.i. de oscilación
 (2 posibles polarizaciones)

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$



cuántos modos permitidos $\exists$ entre $|\vec{k}|$ y $|\vec{k}| + d|\vec{k}|$?

$$\Delta k_x = \pi/L_x$$

$$\Delta k_y = \pi/L_y$$

$$\Delta k_z = \pi/L_z$$

$\Rightarrow$ Cada modo ocupa un "volumen" $\pi^3/L_x L_y L_z = \pi^3/V$

$$n(k) \Delta K = \frac{\frac{1}{8} \cdot 4\pi k^2 \Delta K \times 2}{(\pi^3/V)} = \frac{V k^2 \Delta k}{\pi^2}$$

$$n(k) = \frac{V k^2}{\pi^2}$$

$$\text{De } \omega = ck \Rightarrow d\omega = c dk$$

$$\Rightarrow n(\omega) d\omega = n(k) dk \Rightarrow n(\omega) = \frac{n(k(\omega))}{(d\omega/dk)} = \frac{\left(\frac{V}{\pi^2}\right) \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}{c}$$

$$\therefore n(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{V}{\pi^2 c}$$

(6)

$$\text{Densidad de energía: } u(\omega) = n(\omega) \overline{E_\omega} \quad (7)$$

Teo. clásica: prob. q' un oscilador tenga energía entre E y $E + dE$, si la temp. es T $\Rightarrow$.

$$P(E) dE = \frac{e^{-E/K_B T} dE}{\int_0^\infty e^{-E/K_B T} dE} \quad (8)$$

o sea, $\bar{E}_\omega = \frac{\int_0^\infty E \bar{C} e^{-E/KT}}{\int_0^\infty \bar{C} e^{-E/KT}} = \mathbf{KT}$

$$\Rightarrow U(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{V}{\pi^2 c^3} \cdot K_B T = \boxed{\frac{\omega^2 V K_B T}{\pi^2 c^3}} \quad (9)$$

Fórmula de Rayleigh-Jeans

Energía total en la cavidad:

$$\frac{U}{V} = \frac{K_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega = \infty \quad \rightarrow \leftarrow \quad (10)$$



Teoría de Planck

hipótesis: la energía de un oscilador es un múltiplo entero de $h\omega$.

$$\boxed{E = n h \omega} \quad \text{cte a determinar} \quad (1)$$

$\swarrow$ energía $\downarrow$ entero $\searrow$ freq. angular

$$\bar{E}_\omega = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h \omega e^{-\frac{n h \omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n h \omega}{kT}}} = - h \omega \frac{d}{dx} \left[\log \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n x} \right]_{x = h\omega/kT}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n x} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots$$

$$e^{-x} S = e^{-x} + e^{-2x} + \dots$$

$$S(1 - e^{-x}) = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1 - e^{-x}} \Rightarrow \frac{d}{dx} [\log(1 - e^{-x})^{-1}] = \frac{(1 - e^{-x})^{-2} e^{-x}}{(1 - e^{-x})^{-1}} = \frac{-e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{-1}{e^x - 1} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\bar{E}_\omega = \frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}} \quad (2)$$

$$\bar{E}_\omega \rightarrow k_B T$$

$$h\omega \ll k_B T$$

Rayleigh-Jeans

$$\bar{E}_\omega \rightarrow h\omega e^{-\frac{h\omega}{kT}}$$

$$h\omega \gg k_B T$$

" experimento "

$$u(\omega) = n(\omega) \bar{E}_\omega = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \left(\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right) \quad (3)$$

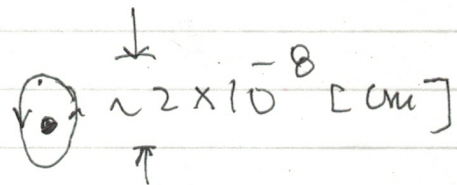
reproduce los resultados experimentales si $\hbar = 1.054 \times 10^{-27} [\text{erg} \cdot \text{s}]$

Efecto Fotoeléctrico

- (i) Al iluminar una placa metálica escapan e^- .
- (ii) Energía de los e^- emitidos es independiente de la intensidad de la luz; sólo dep. de la frecuencia y el tipo de metal.
- (iii) Emisión de e^- es virtual / "instantánea".

(ii) y (iii) NO pueden ser explicados clásicamente

$$1 [\text{watt}] = 10^7 [\text{erg/s}]$$



← 100 [cm] →

la potencia incidente sobre la forma de la placa metálica

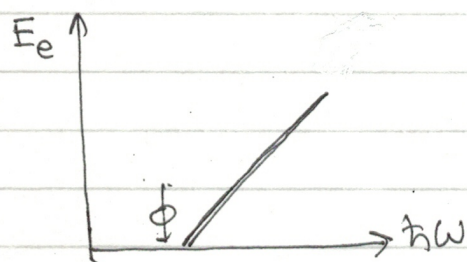
$$\Rightarrow : \quad 10^7 \left[\frac{\text{erg}}{\text{sec}} \right] \frac{\pi (10^{-8})^2 (\text{cm}^2)}{4\pi (100)^2 (\text{cm}^2)} = 0.25 \times 10^{-13} \left[\frac{\text{erg}}{\text{sec}} \right]$$

$\Rightarrow$ para observar $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-12} [\text{erg}]$ se requiere un
energía obs. en los foto-electrones

tiempo del orden de: $\frac{1.6 \times 10^{-12}}{0.25 \times 10^{-13}} \approx 60 \text{ [sec]} = 1 \text{ [min]}$

Einstein: una onda e.m. está compuesta de n partículas (fotones) de energía $h\nu$.

$\Rightarrow$ mayor intensidad $\rightarrow$ mayor n° de fotones.



$E_k = h\nu - \phi$ ← fn. trabajo del metal.
 $\downarrow$
verificado experimentalmente por milliken.

Calor Específico de moléculas diatómicas

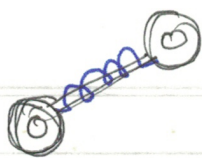
P. de Equipartición de Energía:

cada grado de libertad contribuye con $\frac{1}{2} k_B T$ a la energía total (no relativista)

P. libre en 3D: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \rightarrow \frac{3}{2} k_B T = U$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2} k_B$$

molécula diatómica



$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{L^2}{2I} + \frac{1}{2}ks^2$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $\frac{3}{2}KT \quad KT \quad \frac{1}{2}KT = 3KT \Rightarrow C_v = 3K_B$

sin embargo, experimentalmente se encuentra $C_v = \frac{5}{2}K_B < 3K_B$

según Planck, el grado de l. vibracional sólo puede tener una energía del tipo $n\hbar\omega$

$$\Rightarrow \overline{E}_{vib} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1}$$

del espectro vibracional de la molécula se deduce que $\hbar\omega/K_B \sim 5000[K] \Rightarrow eT \text{ ambiente } (300[K])$,

$$\frac{\hbar\omega}{K_B T} \approx \frac{5000}{300} \gg 1 \Rightarrow \overline{E}_{vib} \ll K_B T$$

o sea, el grado de l. vibracional está "congelado".

$$\overline{E}_{vib} \approx KT \left(\frac{\hbar\omega}{KT}\right) e^{-\left(\frac{\hbar\omega}{KT}\right)} = KT \times 16 e^{-16} = 2 \times 10^{-6} KT \ll KT$$