

ejercicios

1. (a) Suponiendo que las moléculas de Hidrógeno tienen una velocidad cuadrática media (rms) de 1,270 m/s a 300 K, calcule la rms a 600 K.
(b) Estime la temperatura a la cual la velocidad cuadrática media de las moléculas de nitrógeno en la atmósfera es igual a la velocidad de escape del campo gravitacional de la Tierra. (masa atómica Nitrógeno=14, radio Tierra=6,400 km).
2. Un sistema posee niveles de energía no-degenerados con energía $E = (n + 1/2)\hbar\omega$, donde $\hbar\omega = 8.625 \times 10^{-5} \text{ eV}$, y $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
 - (a) Calcule la probabilidad P_{10} de que el sistema esté en el estado $n = 10$ si esta en contacto con un baño térmico a temperatura ambiente ($T = 300\text{K}$).
 - (b) Cual será la probabilidad P_{10} en los casos límites de temperatura muy bajas y muy altas?
 - (c) A que temperatura se maximizara P_{10} ? Para tal temperatura calcule P_{10} .

$$[1] (a) \quad v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{3KT_1}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{3KT_1}{m}} \cdot \sqrt{\frac{m}{3KT_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{3KT_2}{m}}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} v_1 = \sqrt{\frac{600}{300}} \times 1,270 = \boxed{1,796 \left[\frac{m}{s} \right]}$$

$$[b] \quad v_{rms} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$$

$$\frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{GMm}{R} \Rightarrow v_c^2 = \frac{2GM}{R} = 2R \underbrace{\left(\frac{GM}{R^2} \right)}_g = 2gR$$

$$v_{rms} = v_c \Rightarrow \left(\frac{3KT}{m} \right)^{1/2} = (2gR)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{3KT}{m} = 2gR \Rightarrow T = \frac{2mgR}{3K}$$

$$\begin{matrix} N_0 \rightarrow 14g \\ 1 \rightarrow x \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{14}{6.02 \times 10^{23}} = 2.33 \times 10^{-23} \text{ g} = 70,600 \text{ K}$$

$$T = 1.4 \times 10^5 \text{ K} \quad ?$$

$$[2] E_n = (n + \frac{1}{2}) h\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_n = A e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})h\omega}{kT}} = A e^{-\frac{h\omega}{2kT}} e^{-\frac{nh\omega}{kT}}$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\frac{h\omega}{2kT}} e^{-\frac{nh\omega}{kT}} = A e^{-\frac{h\omega}{2kT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\omega}{kT}}$$

$$S = 1 + e^{-\frac{h\omega}{kT}} + e^{-\frac{2h\omega}{kT}} + \dots$$

$$e^{-\frac{h\omega}{kT}} S = e^{-\frac{h\omega}{kT}} + e^{-\frac{2h\omega}{kT}} + \dots$$

$$S(1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}) = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}}$$

$$1 = \frac{A e^{-\frac{h\omega}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}} = \frac{A e^{-\frac{h\omega}{2kT}}}{e^{-\frac{h\omega}{kT}} (e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1)} = \frac{A e^{\frac{h\omega}{2kT}}}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}$$

$$\Rightarrow A = (e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1) e^{-\frac{h\omega}{2kT}}$$

$$P_n = (e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1) e^{-\frac{h\omega}{2kT}} \times e^{-\frac{nh\omega}{kT}}$$

$$(e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1) e^{-\frac{h\omega}{kT}} e^{-\frac{nh\omega}{kT}} = (1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}) e^{-\frac{nh\omega}{kT}}$$

$$\frac{h\omega}{kT} = \frac{1.0}{300} \quad P_{10} = (1 - e^{-0.0033}) e^{-\frac{10}{300}} = 0.00321$$

$$P_n = (1 - e^{-\frac{h\omega}{kT}}) e^{-\frac{nh\omega}{kT}}$$

$$T \rightarrow 0 \quad e^{-\frac{h\omega}{kT}} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad e^{-\frac{nh\omega}{kT}} \rightarrow 0 \quad (\text{except at } n=0)$$

$$\boxed{P_{10}(T \rightarrow 0) = 0}$$

$$T \rightarrow \infty, \quad e^{-\frac{h\omega}{kT}} \rightarrow 1, \quad e^{-\frac{nh\omega}{kT}} \rightarrow 1 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{10}(T \rightarrow \infty) = 0}$$

$$P_n = (1 - e^{-\beta}) e^{-n\beta}$$

$$\beta = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$P_{10} = (1 - e^{-\beta}) e^{-10\beta}$$

$$0 = \frac{dP_{10}}{dT} = \frac{d\beta}{dT} \cdot \frac{dP_{10}}{d\beta} = -\frac{\hbar\omega}{kT^2} \left\{ e^{-\beta-10\beta} + (1 - e^{-\beta})(-10)e^{-10\beta} \right\}$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{kT^2} e^{-10\beta} [e^{-\beta} + (1 - e^{-\beta})(-10)]$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{kT^2} e^{-10\beta} [e^{-\beta} - 10 + 10e^{-\beta}]$$

$$[11e^{-\beta} - 10]$$

$$\Rightarrow 11e^{-\beta} = 10 \Rightarrow e^{-\beta} = \frac{10}{11} \Rightarrow$$

$$-\beta = \ln(10/11)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \ln(11/10)}$$

$$\therefore \frac{\hbar\omega}{kT} = \ln(11/10) \Rightarrow T = \frac{\hbar\omega}{k \ln(11/10)} = \frac{1}{\ln(11/10)} = \boxed{10.5}$$

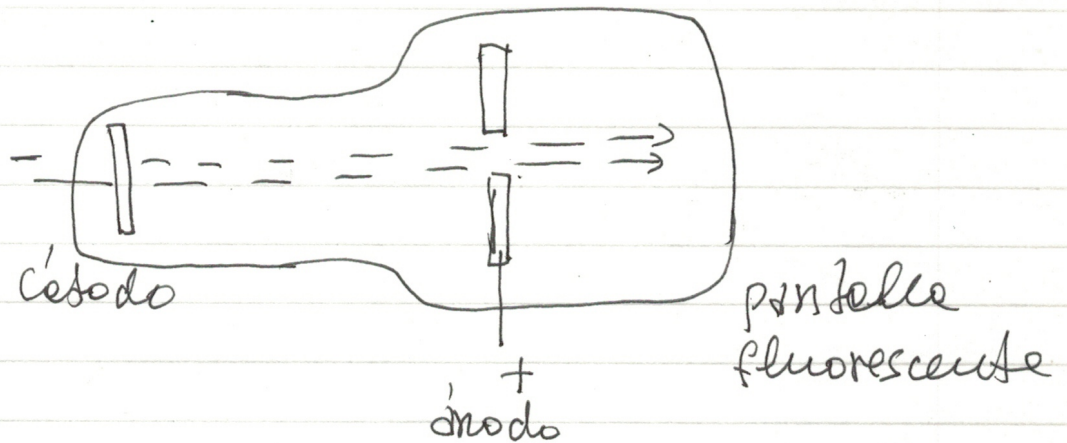
conocido

$$P_{10} = (1 - e^{-\beta}) e^{-10\beta} = (1 - e^{-\ln(11/10)}) e^{-10 \ln(11/10)} = \boxed{0.035}$$

$$\Rightarrow 3.5\%$$

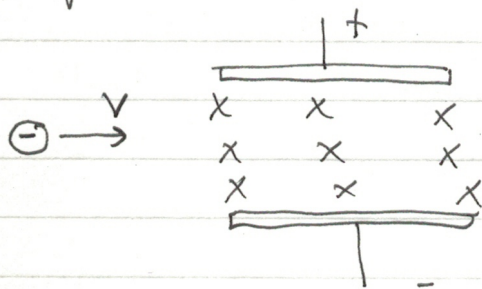
EL Electrón: "átomo de electricidad"

Rayos Catódicos:



rayos pueden desviarse con $\vec{B}$.

J.J. Thompson (1897) midió e/m :



$$eVB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{e}{m} = \frac{v}{RB}}$$

F. Lorentz

se ajusta el $\vec{E}$ externo hasta lograr cero deflexión

$$\Rightarrow eE = eVB \Rightarrow \boxed{v = E/B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{e}{m} = \frac{E}{RB^2}} \approx 10^8 \text{ C/g}$$

Grande comparado con $\left(\frac{e}{m}\right)_H = 96500 \text{ C/g}$.

Mediendo la carga del electrón

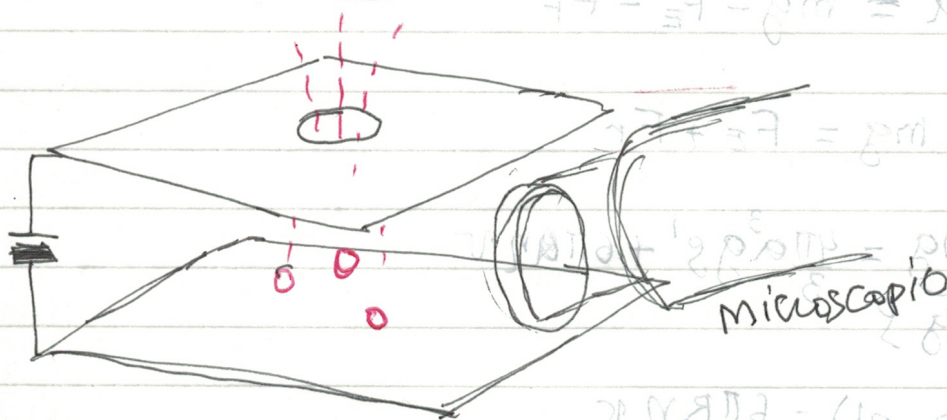
preliminar: gota de fluido, densidad ρ , radio a ,
cargada en un medio densidad ρ' , viscosidad η

veloc. terminal:
$$V_g = \frac{(2/9) g a^2 (\rho - \rho')}{\eta} \quad (1)$$

ley de Stokes

Derivación: ejercicio

1906: Robert Millikan: medición directa de e



gotas de aceite cargadas eléctricamente. con entre 2 placas metálicas sobre las cuales se aplica un voltaje conocido.

$\vec{E} = 0$

F_v medio viscoso $F = -a v$ μ masa efectiva gota

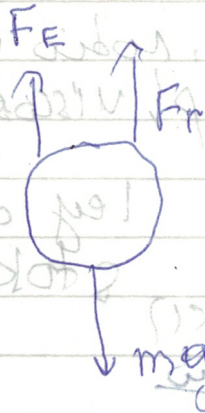
$V_g = K F_v = K \mu g \quad (2)$

$\mu = \frac{4\pi}{3} a^3 (\rho - \rho')$ $\leftarrow$ aceite $\leftarrow$ aire (3)

comparando con (1) $\Rightarrow K = 1/(6\pi\eta a) \quad (4)$

Mediendo $V_g \rightarrow$ determinando $a \rightarrow$ dot. μ y K

derivacion de la ley de Stokes



$$mg = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho g$$

$$F_E = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho' g$$

$$F_r = 6\pi R \eta v$$

verdadera ley de Stokes

$$ma = mg - F_E - F_r$$

$$\text{Si } v = v_g \Rightarrow mg = F_E + F_r$$

$$mg = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho g = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho' g + 6\pi R \eta v$$

$$\frac{4\pi}{3} a^3 g (\rho - \rho') = 6\pi R \eta v$$

$$v = \frac{\frac{4\pi}{3} a^3 g (\rho - \rho')}{6\pi R \eta} = \left(\frac{2}{9}\right) g (\rho - \rho') \frac{a^2}{\eta}$$



$$v = \frac{2}{9} g (\rho - \rho') \frac{a^2}{\eta}$$

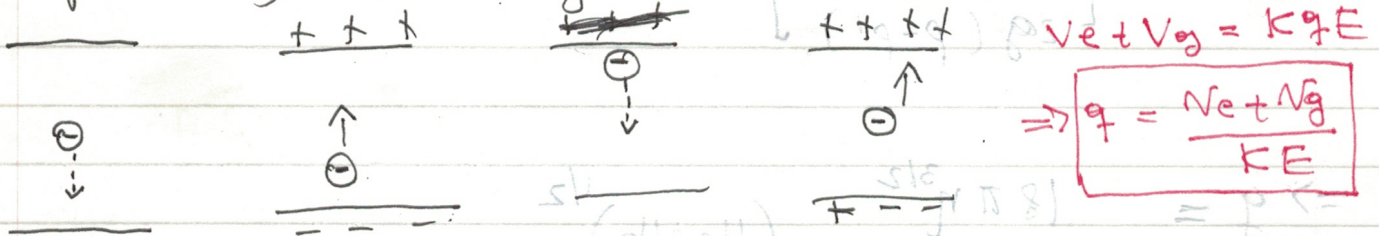
$$v = \frac{2}{9} g (\rho - \rho') \frac{a^2}{\eta}$$

$$v = \frac{2}{9} g (\rho - \rho') \frac{a^2}{\eta}$$

La carga total en la gota se del. de medicación de V_g en presencia de E :

$$V_e = K(Eq - \mu g) \quad \checkmark$$

Se sigue a una gota individual a través de un ciclo de aplicación de voltaje:



Ocasionalmte, la gota cambia su carga total debido a colisiones con las moléculas de aire

$$V_{e1} = K(Eq_1 - \mu g)$$

$$V_{e2} = K(Eq_2 - \mu g)$$

$$\Rightarrow V_{e1} - V_{e2} = K(Eq_1 - Eq_2) \Rightarrow q_1 - q_2 = \left(\frac{V_{e2} - V_{e1}}{KE} \right)$$

se encuentra que $q_1 - q_2 \approx Ne$
También se halló que $q \approx Ne$.

P. Nobel 1923

die Spannung ist in der Mitte der Elektroden
 $V_g = V_e + V_g$

$$q = \frac{(V_e + V_g) \cdot 6\pi n \eta}{E}$$

$$V_g = K(E_g - E_e) \quad \checkmark$$

die Spannung ist in der Mitte der Elektroden
 $V_g = V_e + V_g$

$$\text{but } a = \left[\frac{q V_g \eta}{2g(p-p')} \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{q(V_e + V_g)}{KE}$$

$$\Rightarrow q = \frac{18\pi\eta^{3/2} \cdot (V_e + V_g)^{1/2}}{[2g(p-p')]^{1/2} E}$$

REDO

$$V_e = K(E_g - E_e)$$

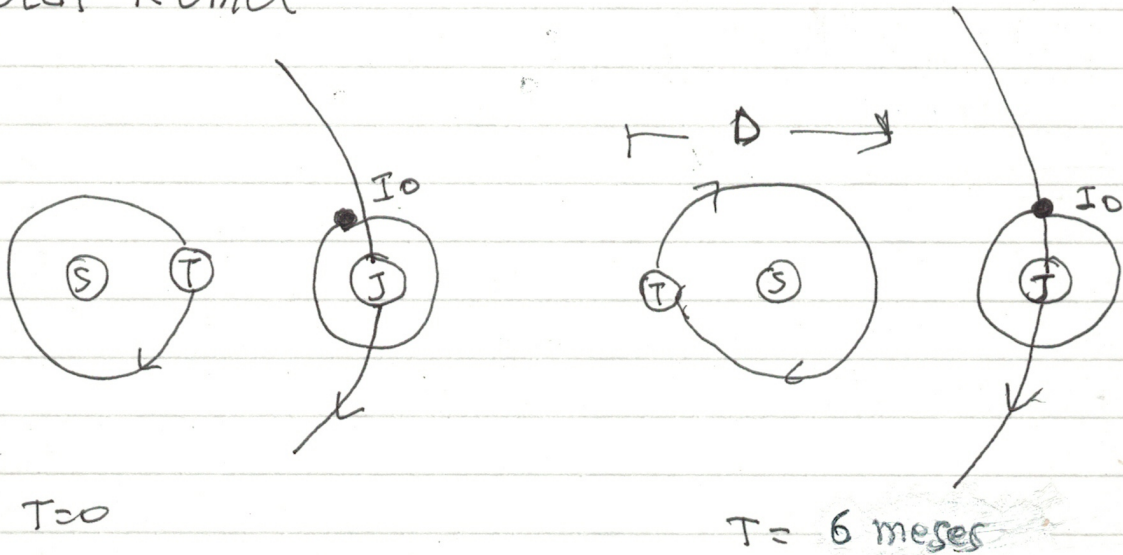
$$\Rightarrow V_e - V_g = K(E_g - E_e) \Rightarrow p - p' = \left(\frac{V_e - V_g}{KE} \right)$$

die Spannung ist in der Mitte der Elektroden
 $V_g = V_e + V_g$

$$V_g = K(E_g - E_e)$$

La velocidad de la luz es finita

1676: Olef Römer



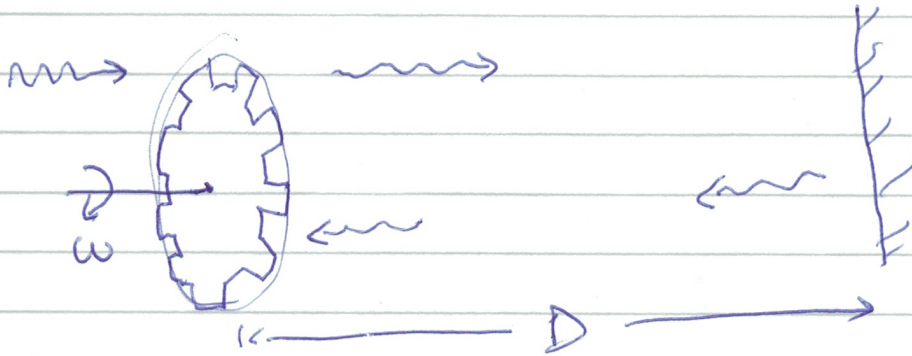
se observó un retraso de 22 min., atribuible a una
 cuando $D \approx 293.000.000 \text{ km}$ distancia "extra"
 $\Rightarrow c \approx 222.000 \text{ km/s}$

Muy alta!

coefic. dilatac. ediab.		mod. de Young	mod. compresibilidad
$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$	$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$	
gase	solidos	líquidos	
331 m/s	6400 m/s	1593 m/s	

$c \gg 1$ implicaría la E de un medio con $\rho \ll 1$: ETER

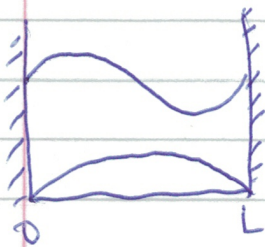
Medición Directa (Fizeau) 1849.



conociendo D , # dientes y ω

$$\Rightarrow c = 313.000 \text{ (cm/s)}$$

1946 : L. Essen & A.C. Gordon-Smith



cavidad
resonante

$$c = \lambda f$$

λ, f medidos independiente.

$$c = 299.792 \text{ (km/s)}.$$

Maxwell: velocidad de ondas electromagneticas

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0} = 1/(1.257 \cdot 10^{-6} \times 8.854 \cdot 10^{-12}) = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$