Ayudantía 2 Mecánica 2

Profesor: Felipe Torres

Agustín Lorca P. /Mauricio Matinez

1. Ejercicios:

1.1. Pregunta 1:

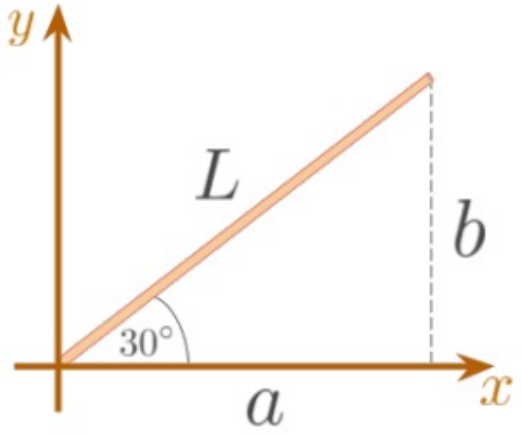
Una barra de largo $L = 2$ [m] forma un ángulo de 30° con respecto al eje x. Si la barra se mueve a una velocidad de $0,995c$ a lo largo del eje x, determine la longitud y el ángulo que forma la barra en el sistema móvil.

1.2. Solucion 1:

Sol. A diferencia de otros ejercicios que hemos hecho en ayudantía, esta vez nos dan los datos de lo que percibe el observador en el sistema S y nos piden encontrar esos datos pero en S'. De esta manera, como la barra se mueve solo en el eje x, su longitud en x es la única que se contrae.

Primero que todo, calculando el valor del factor γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0,995c}{c}\right)^2}} \approx 10,013$$



Con respecto al diagrama anterior, se tiene que por contracción de longitud:

$$L = \frac{L'}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad L' = \gamma L \quad \Rightarrow \quad a' = \gamma a$$

Y por trigonometría, podemos encontrar relaciones con los lados del triángulo del diagrama:

$$\cos(30°) = \frac{a}{L} \quad \Rightarrow \quad a = L\cos(30°)$$
$$\sin(30°) = \frac{b}{L} \quad \Rightarrow \quad b = L\sin(30°)$$

Además, como la barra solo se mueve en x, se tiene que $b = b' = L\sin(30°)$.

Con estos datos, podemos entonces obtener que la longitud de la barra en S' cumple con:

$$a' = \gamma L\cos(30°) = 2\,[m] \times \cos(30°) \times 10{,}013 \approx 17{,}343\,[m]$$

$$b' = L\sin(30°) = 2\,[m] \times \sin(30°) = 1\,[m]$$

Con ello, sabiendo que $L' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$ (pues el diagrama en S presentado es equivalente al de S', con sus los parámetros correspondientes). Con ello, obtenemos finalmente que

$$\boxed{L' = \sqrt{17{,}343^2 + 1^2} \approx 17{,}372}$$

Por otra parte, también sabemos por el paso de coordenadas polares a coordenadas cartesianas que

$$\theta = \arctan\left(\frac{b'}{a'}\right) = \arctan\left(\frac{1}{17{,}343}\right) = \boxed{3{,}3°}$$

1.3. Pregunta 2:

Consideramos una fuente de ondas electromagnéticas en reposo para un marco de referencia S, que se encuentra emitiendo ondas de frecuencia ω para este marco de referencia. Encontrar la frecuencia ω' y longitud de onda λ' medida por un observador en el marco de referencia S', que se está moviendo con velocidad v hacia S.

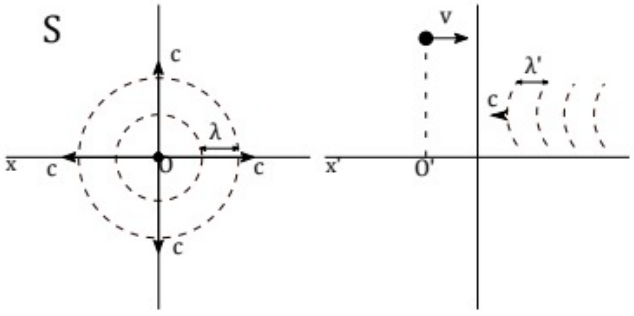


Figura 1: Representación del sistema. O corresponde a la fuente emisora de ondas electromagnéticas, mientras que O' al observador que se mueve con velocidad v

AYUDA: Asuma conocido que la velocidad de la luz se puede escribir como:

$$c = f_A \lambda_A$$

Con c: velocidad de la luz, f: frecuencia y λ: Longitud de onda. Observe que para que la velocidad sea constante deben variar respectivamente los parámetros internos (Pequeño adelanto de Ondas).

1.4. Solucion 2:

En general, esperamos que $\omega' > \omega$, porque el observador recibirá más crestas de la onda por unidad de tiempo a medida que se acerca.

Para desarrollar el problema, nos situaremos en S'. Dado que el observador se mueve con velocidad v, es exactamente lo mismo trabajarlo como si el observador estuviera quieto y la fuente emisora de ondas se moviera a velocidad v, así que esto es lo que haremos. Así, dibujaremos un nuevo diagrama, que exprese este marco de referencia S'. Dada que la fuente emisora de ondas está en movimiento, podemos analizar tres puntos de su recorrido, que denotaremos como círculos rojos en la figura 2. El primero será la posición inicial 1. Desde aquí, dejamos pasar un tiempo T' hasta que la fuente vuelve a emitir un frente de ondas. Pasado otro tiempo T', denotamos el tercer punto. Claramente, entonces T' corresponderá al periodo de la onda

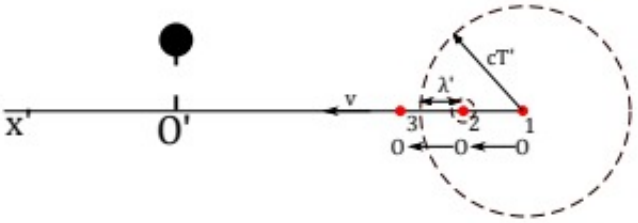


Figura 2: Representación del sistema. La onda se emite en 1 y 2, separados un tiempo T'

Dado que consideramos 1 y 2 como dos frentes de onda sucesivos separados por un tiempo T', entonces la distancia recorrida por el primer frente de onda será cT' (el radio de la esfera) desde esta posición. Durante este mismo tiempo, la fuente emisora se mueve una distancia vT' hacia la izquierda de la posición 1, hasta la posición 2. Como vemos en el diagrama, la diferencia entre estas dos distancias medidas en S' corresponde a la longitud de onda λ'. Así, podemos escribir

$$\lambda' = cT' - vT' = (c - v)T'$$

Ahora, consideramos para la velocidad de propagación de la onda $c = \lambda' f'$. Esto nos permite despejar $f' = c/\lambda'$, por lo que obtendremos

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{(c - v)T'}$$

Para la transformación del tiempo propio T en un marco relativista, sabemos que

$$T' = \gamma T = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} T$$

Si reemplazamos esto en la expresión anterior, tendremos

$$f' == \frac{c}{(c - v)} \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{T}$$

Usamos que $f = 1/T$, y factorizamos la expresión de la izquierda por c. Así, tendremos

$$f' = \frac{c}{c} \frac{1}{(1 - v/c)} \sqrt{1 - (v/c)^2} f$$

Así es como simplificando obtenemos

$$f' = \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - (v/c)} f = \frac{\sqrt{(1 - (v/c))(1 + (v/c))}}{1 - (v/c)} f$$

Y simplificando esto último, obtenemos finalmente la expresión para la frecuencia medida por el observador según la frecuencia emitida en el caso relativista.

$$\boxed{f' = \frac{\sqrt{1 + (v/c)}}{\sqrt{1 - (v/c)}} f}$$

Claramente, esto corresponde al efecto Doppler relativista. Por otra parte, para la longitud de onda tendremos $c = \lambda f \implies \lambda = c/f$. Así, podemos escribir

$$\lambda' = \frac{c}{f'} = \frac{\sqrt{1 - (v/c)}}{\sqrt{1 + (v/c)}} \frac{c}{f}$$

Así obtenemos finalmente

$$\boxed{\lambda' = \frac{\sqrt{1 - (v/c)}}{\sqrt{1 + (v/c)}} \lambda}$$

1.5. Pregunta 3:

Sobre colisiones y decaimientos:

a) Demostrar que un electrón no puede radiar un solo fotón, tal que $e \to e + \gamma$

b) Un neutrón es inestable con una vida media de $\tau = 900$s. Encontrar cuanto puede viajar en promedio el neutrón con una energía de $\epsilon = (1 + 10^{-5})mc^2$ y $\epsilon = 10^5 mc^2$

c) Un neutrón ($mc^2 = 939{,}6$ MeV) decae en un protón ($mc^2 = 938{,}3$ MeV), un electrón ($mc^2 = 0{,}5$ MeV) y un antineutrino ($mc^2 = 0$ MeV). Las tres partículas emergen 120 grados aparte en un plano. ¿Cuál es la energía cinética y momento de cada partícula?

1.6. Solucion 3:

Podemos expresar la conservación de energía para el decaimiento del electrón como

$$E_{e_i} = E_\gamma + E_{e_f}$$

Con E_{e_i} la energía del electrón previa a la colisión, E_γ la energía cinética del fotón y E_{e_f} la energía final de electrón. Previo al decaimiento, podemos considerar la energía final electrón como si estuviera en reposo, teniendo así previo al decaimiento $E_{e_i} = \gamma mc^2$, y $E_{e_f} = mc^2$ para la energía final. Claramente, la energía del fotón corresponde a su energía cinética $E_\gamma = h\nu$, con el factor de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1 - v/c}$. Reemplazando todo esto en la conservación de energía, tendremos

$$\gamma mc^2 = mc^2 + h\nu$$

Factorizando esto, tendremos

$$mc^2(\gamma - 1) = h\nu$$

Por otra parte, por conservación de momentum, el momentum del fotón debe ser de igual magnitud que el del electrón después de la colisión. Si $p_e = \gamma mv$ y $p_\gamma = h\nu/c$, tendremos

$$\gamma mv = \frac{h\nu}{c}$$

En este caso, el factor gamma está asociado al electrón posterior al decaimiento porque tenemos una velocidad v a la que se mueve el electrón, que se aproxima a c. Notamos que, desde lo anterior, $mc^2(\gamma - 1) = h\nu$. Así, reemplazando esto, tendremos

$$\gamma mv = mc(\gamma - 1) \implies \gamma v = c(\gamma - 1)$$

Al despejar γ desde esto, tendremos

$$\gamma c - \gamma v = c \implies \gamma = \frac{c}{c - v}$$

Ahora, recuperamos la definición de γ. Tendremos, para su cuadrado

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

Y si elevamos al cuadrado lo deducido anteriormente, tendremos el par de expresiones para γ

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}, \quad \gamma^2 = \frac{c^2}{(c - v)^2}$$

Donde claramente tenemos una igualdad. Multiplicando el término de la izquierda por el uno c^2/c^2, tendremos

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}\frac{c^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

Desarrollando la igualdad anterior desde esto,

$$\frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2}{(c - v)^2} \implies \frac{c^2}{(c - v)(c + v)} = \frac{c^2}{(c - v)^2}$$

Notamos que esto sólo se cumple si la velocidad del electrón es $v = 0$, lo que no tiene sentido en este escenario. Así, el decaimiento $e \to e + \gamma$ no puede ocurrir.

b)

Sol:

Tenemos un neutrón inestable con una vida media $\tau = 900$s y energía $\epsilon = (1 + 10^{-5})mc^2$ y $\epsilon = 10^5 mc^2$ Con esto, tendremos que podemos expresar la energía del neutrón agrupando los casos como

$$E_n = (1 + 10^{\pm 5})mc^2 = \gamma mc^2$$

Entonces, es evidente que podemos recuperar $\gamma = (1 + 10^{\pm 5})$. Entonces, denotamos los valores posibles

$$\gamma_- = 1{,}00001, \quad \gamma_+ = 100001$$

Para despejar la velocidad v desde el factor de Lorentz, podremos desarrollar

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \implies \gamma^2 = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)}$$

Seguimos desarrollando esto para despejar v,

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \implies \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \implies \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

Finalmente, factorizando esto, tendremos la expresión

$$v = \frac{c}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Y con esto debemos buscar cuanto puede viajar en cada caso. Si la vida media τ corresponde al tiempo propio del neutrón, podemos encontrar el tiempo medido en laboratorio t para la vida media del neutrón inestable con vida media τ directamente con la expresión $t = \gamma\tau$. Por cinemática, es evidente ver que entonces la distancia d que alcanzará a recorrer el neutrón durante el tiempo t de laboratorio corresponde a $d = vt = v\tau\gamma$. Así, reemplazando v en esta expresión, tendremos

$$d = \left(\frac{c}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 1}\right)\tau\gamma = c\tau\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Reemplazando con los valores numéricos conocidos, tendremos

$$d = (3 \times 10^8)[\text{m/s}](900)\text{s}\sqrt{(1+10^{\pm 5})^2 - 1} = (2{,}7 \times 10^{11})\sqrt{(1+10^{\pm 5})^2 - 1}[\text{m}]$$

Así, para el caso positivo, tendremos

$$d_+ = (2{,}7 \times 10^{11})\sqrt{100001^2 - 1}[\text{m}] = (2{,}7 \times 10^{11})(10001)[\text{m}]$$

Finalmente, en este caso el valor numérico de la distancia que puede ser recorrida por el neutrón corresponde a

$$\boxed{d_+ = 2{,}7 \times 10^{16}[\text{m}]}$$

Análogamente, para d_- tendremos

$$d_- = (2{,}7 \times 10^{11})\sqrt{1{,}00001^2 - 1}[\text{m}] = (2{,}7 \times 10^{11})(0{,}00447)[\text{m}]$$

Así, finalmente tendremos para d_-

$$\boxed{d_- = 1{,}207 \times 10^9[\text{m}]}$$

c)

Un neutrón con $mc^2 = 939{,}6$ MeV decae en un protón $mc^2 = 938{,}3$MeV, un electron $mc^2 = 0{,}5$MeV y un antineutrino $mc^2 = 0$. Las tres partículas emergen 120 grados apaprte en un plano. ¿Cuál es la energía cinética y momento de cada partícula?

Sol:

Por conservación del momentum, tendremos que para este sistema, el momentum del neutrón tiene que ser equivalente a a suma de los momentum de cada una de las partículas a las que da origen su decaimiento. Esto puede ser expresado como

$$\vec{p}_n = \vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu$$

Con p_n momentum del neutrón, p_p del protón, p_e del electrón y p_ν del neutrino. Sin embargo, es conveniente elegir un sistema de referencia donde el neutrón se encuentre en reposo al decaer. Esto convierte la igualdad anterior en

$$0 = \vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu$$

Ahora, evaluamos esto en el eje $\hat{x}$. Imponiendo que el momentum del protón sea paralelo al eje $\hat{x}$ para asegurar la condición de los 120 grados, entonces su magnitud en este eje es solo p_p. Ahora, entre $\vec{p}_e$ y $\vec{p}_\nu$ debe existir un ángulo de 120 grados, desde enunciado. Así, esta expresión se puede escribir como

$$0 = p_p + p_e \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + p_\nu \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = p_p - \frac{1}{2}p_e - \frac{1}{2}p_\nu$$

Por otro lado, para el eje $\hat{y}$ tendremos que conservación del momentum en este eje puede ser expresada como

$$0 = p_e \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + p_\nu \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}p_e - \frac{\sqrt{3}}{2}p_\nu$$

Desde esto último, es evidente que $p_e = p_\nu$. Considerando esto en la conservación para el eje $\hat{x}$ también implica que $p_p = p_e = p_\nu$. Por otro lado, haciendo el análisis desde la equivalencia de energía, tendremos

$$E_n = E_p + E_e + E_\nu$$

E_n corresponde a energía en reposo, mientras que para los demás casos existe momentum, y por lo tanto debemos utilizar la expresión correspondiente. Así, expandiendo lo anterior, tenemos

$$m_n c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + p_p^2 c^2} + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} + \sqrt{m_\nu^2 c^4 + p_\nu^2 c^2}$$

Desde enunciado, $m_\nu c^2 = 0$, y dada la igualdad entre los momentum los podemos denotar simplemente como p. Así, tendremos la expresión

$$m_n c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + p^2 c^2} + \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} + pc$$

Con el objetivo de despejar p, podemos reemplazar numéricamente reemplazando los valores conocidos de $m_p c^2$, $m_n c^2$ y $m_e c^2$. Así, tendremos

$$\begin{aligned}(939{,}6)[\text{MeV}] &= \sqrt{(938{,}3^2)[\text{MeV}]^2 + p^2c^2} + \sqrt{0{,}5^2[\text{MeV}]^2 + p^2c^2} + pc \\ &= \sqrt{(880970)[\text{MeV}]^2 + p^2c^2} + \sqrt{0{,}25[\text{MeV}]^2 + p^2c^2} + pc\end{aligned}$$

Pasando pc a la izquierda y elevando al cuadrado, tendremos

$$\begin{aligned}((939{,}6)[\text{MeV}] + pc)^2 &= \left(\sqrt{(880970)[\text{MeV}]^2 + p^2c^2} + \sqrt{0{,}25[\text{MeV}]^2 + p^2c^2}\right)^2 \\ 882848[\text{MeV}]^2 + 939{,}6(2pc) + p^2c^2 &= (880970)[\text{MeV}]^2 + p^2c^2 + 0{,}25[\text{MeV}]^2 + p^2c^2 \\ &\quad + 2\sqrt{(880970)[\text{MeV}]^2 + p^2c^2}\sqrt{0{,}25[\text{MeV}]^2 + p^2c^2}\end{aligned}$$

Al seguir desarrollando esto algebraicamente y despreciando el término 0.25, tendremos

$$\begin{aligned}882848[\text{MeV}]^2 + 1879{,}2pc + p^2c^2 &= 2p^2c^2 + 880970[\text{MeV}]^2 + 2\sqrt{(880970)[\text{MeV}]^2 + p^2c^2}\sqrt{0{,}25[\text{MeV}]^2 + p^2c^2} \\ 0 &= p^2c^2 - 1878[\text{MeV}]^2 + 2\sqrt{(880970)[\text{MeV}]^2 + p^2c^2}\sqrt{0{,}25[\text{MeV}]^2 + p^2c^2}\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, tendremos que $p = 0{,}5537[\text{MeV}/c]$, quedándonos con el caso positivo. Este momento también se cumple para el neutrón, protón, electrón y neutrino, desde lo descrito anteriormente. Así, despejamos los momentum de cada partícula como

$$\boxed{p = p_e = p_\nu = p_p = 0{,}5537[\text{MeV}/c]}$$

Y con esto, podemos calcular las energías cinéticas para cada partícula. Primero tendremos las energías de cada partícula, correspondientes a

$$\begin{aligned}E_p &= \sqrt{m_p^2c^2 + p^2c^2} \\ E_e &= \sqrt{m_e^2c^2 + p^2c^2} \\ E_\nu &= \sqrt{m_p^2c^2 + p^2c^2} = pc\end{aligned}$$

Y sabemos que para cada caso, se cumple $E = K + E_0$, con E_0 la energía de la masa en reposo. Despejando $K = E - E_0$, tendremos en cada partícula las energia cinéticas

$$\begin{cases}K_p = \sqrt{m_p^2c^4 + p^2c^2} - m_pc^2 = 1{,}64 \times 10^{-4}[\text{MeV}] \\ K_e = \sqrt{m_e^2c^4 + p^2c^2} - m_ec^2 = 0{,}247[\text{MeV}] \\ K_\nu = pc = 0{,}5537[\text{MeV}]\end{cases}$$