

1 Ayudantía 16/08

Ejercicio 1.1. Describir el cuerpo de cuatro elementos.

Desarrollo. Consideramos el polinomio $P(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$. Como $P(0) \neq 0 \neq P(1)$, por teorema 1.1.13 de los apuntes obtenemos que $\mathbb{F}_4[x] := \mathbb{F}_2[x]/\langle P \rangle$ tiene de $\mathbb{F}_2$ -base al conjunto $\{1, \alpha\}$ con $\alpha = \bar{x}$, por lo tanto $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$. Para conocer su tabla aditiva basta recordar que tiene característica dos, y para conocer su tabla multiplicativa hay que recordar que $0 = P(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1$. $\square$

Ejercicio 1.2. Encontrar un cuerpo de infinitos elementos de característica positiva.

Proof. Sea K un cuerpo de característica positiva, recordemos que conocemos cuerpos de característica p solo para cada p primo. Sabemos que $K[x]$ tiene la misma característica, como es un dominio de integridad podemos considerar su cuerpo de fracciones $K(x)$ que tendrá la misma característica. Luego, $K(x)$ tiene infinitos elementos y es de la misma característica que K , más aún, $K(x)$ tiene dimensión infinita sobre K . $\square$

Ejercicio 1.3. ¿Existe un homomorfismo de cuerpos entre dos cuerpos de distinta característica?

Proof. Sean K y F dos cuerpos de distinta característica. Inmediatamente se deduce que al menos uno de ellos tiene característica positiva. Luego, o bien existe $p \in \mathbb{N}$ primo que satisface (1), o bien existe $q \in \mathbb{N}$ primo que satisface (2).

$$0 = \underbrace{1_F + \cdots + 1_F}_{p\text{-veces}} \quad \wedge \quad 0 \neq \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{p\text{-veces}} \quad (1)$$

$$0 \neq \underbrace{1_F + \cdots + 1_F}_{q\text{-veces}} \quad \wedge \quad 0 = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{q\text{-veces}} \quad (2)$$

Si existiese un homomorfismo de cuerpos $\varphi : F \rightarrow K$, primero recordemos que por ser homomorfismo de cuerpos es inyectiva y $\varphi(1_F) = 1_K$. Luego, o bien tendríamos (3), o bien (4).

$$0 = \varphi(0) = \varphi(\underbrace{1_F + \cdots + 1_F}_{p\text{-veces}}) = \underbrace{\varphi(1_F) + \cdots + \varphi(1_F)}_{p\text{-veces}} = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{p\text{-veces}} \neq 0 \quad (3)$$

$$\varphi(0) \neq \varphi(\underbrace{1_F + \cdots + 1_F}_{p\text{-veces}}) = \underbrace{\varphi(1_F) + \cdots + \varphi(1_F)}_{p\text{-veces}} = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{p\text{-veces}} = 0 = \varphi(0) \quad (4)$$

Dado que si o si se llega a una contradicción, concluimos que no existe homomorfismo de cuerpos entre cuerpos de distinta característica. $\square$

Remark 1.1. Otra solución sería usar directamente la inyectividad. Si $\varphi : F \rightarrow K$ es un homomorfismo de cuerpos entonces existe un subcuerpo L de K isomorfo a F . Luego, $\text{car}(L) = \text{car}(F)$, y como L es subcuerpo de K entonces comparten el 1 y por lo tanto $\text{car}(F) = \text{car}(K)$.

Ejercicio 1.4. Sean K y F cuerpos, sea $\varphi : K \rightarrow F$ un homomorfismo de cuerpos. Demostrar que φ restringido al cuerpo generado por 1 es la identidad.

Proof. Por ser homomorfismo de cuerpos es inyectivo, por lo tanto podemos ver K como subcuerpo de F .

Ahora bien, denotamos por $L_0 := \mathbb{Q}$, $L_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para todo $p \in \mathbb{N}$ primo y $n := \text{car}(K)$. Así el subcuerpo generado por 1 es L_n . Como un homomorfismo de cuerpos preserva suma, multiplicación, el cero, el uno, inversos aditivos e inversos multiplicativos, concluimos que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in L_n$. $\square$

Corollary 1.1. El único automorfismo de cuerpos de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{F}_p$ es la identidad, para todo p .