

Resolución ayuda 11

1. Dado el circuito que se observa en Figura 1 con sus respectivas corrientes y resistencias. Determine los valores de las corrientes I_1 , I_2 e I_3 , considerando $r = 1\Omega$

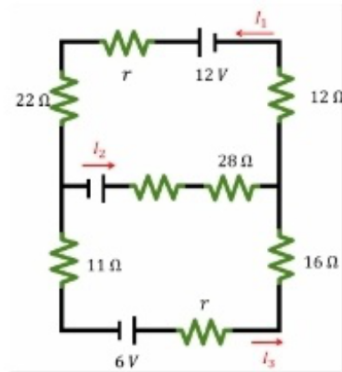
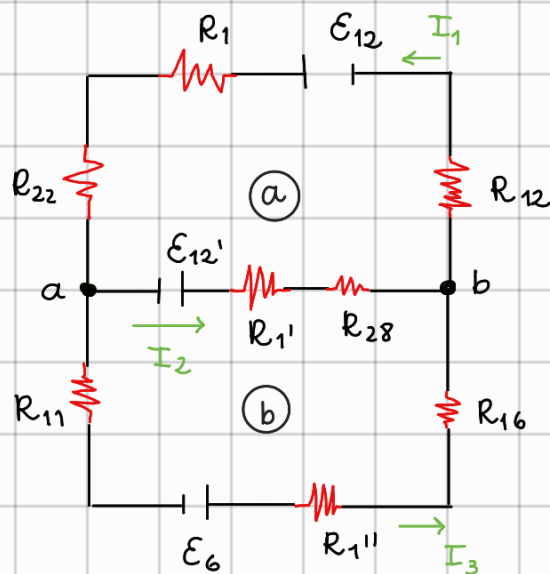


Figura 1

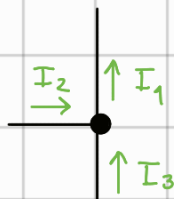
Trabajaremos algebraicamente, para esto, definiremos cada variable en el circuito, quedándonos:



ej: $E_{12} = 12V$
 $R_1 = 1\Omega$

Donde cada subíndice indicará el valor de las magnitudes.

Para buscar el valor de las corrientes I_1 , I_2 e I_3 , utilizaremos las reglas de Kirchhoff. En primer lugar usaremos la regla de los nodos, en el nodo b:

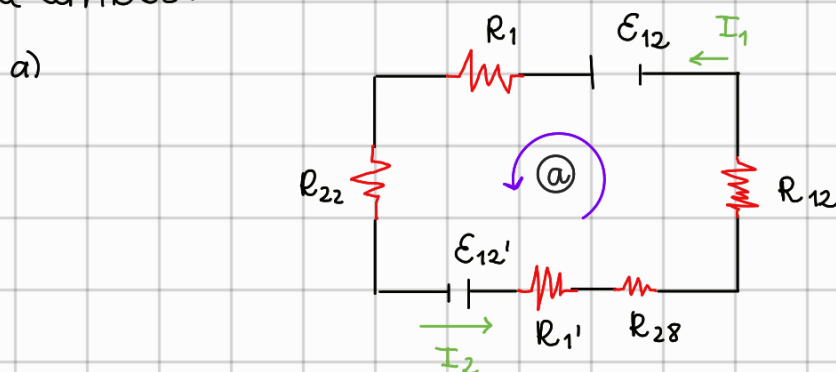


Obteniendo así:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

(1)

Como tenemos tres incógnitas y sólo una ecuación, busquemos otras dos con la regla de las espiras. Para esto, consideraremos dos circuitos a y b con el recorrido en sentido antihorario para ambos:



Quedando la expresión:

$$\mathcal{E}_{12} - I_1 R_1 - I_1 R_{22} + \mathcal{E}_{12}' - I_2 R_{1'} - I_2 R_{28} - I_1 R_{12} = 0.$$

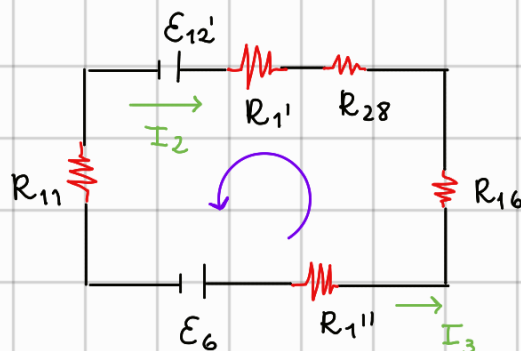
Factorizando y reordenando:

$$\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}' - I_1 (R_1 + R_{22} + R_{12}) - I_2 (R_{1'} + R_{28}) = 0.$$

Dado que las resistencias por las que pasa I_1 están en serie, podemos sumarmas, lo mismo para las resistencias por las que pasa I_2 :

$$\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}' - I_1 R_{35} - I_2 R_{29} = 0. \quad (2)$$

b)



Quedando la expresión:

$$\mathcal{E}_6 - I_3 R_{1''} - I_3 R_{16} + I_2 R_{1'} + I_2 R_{28} - \mathcal{E}_{12}' - I_3 R_{11} = 0.$$

Factorizando y reordenando:

$$\mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_{12}' - I_3 (R_{1''} + R_{16} + R_{11}) + I_2 (R_{1'} + R_{28}) = 0.$$

Como en a), las resistencias por las que pasa I_3 están en serie, podemos sumarmas:

$$\mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_{12}' - I_3 R_{28} + I_2 R_{29} = 0. \quad (3)$$

Con ec. (1), (2) y (3) generamos un sistema:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3, \\ \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}' - I_1 R_{35} - I_2 R_{29} = 0, \\ \mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_{12}' - I_3 R_{28} + I_2 R_{29} = 0. \end{cases}$$

Despejando I_1 de ec. (2):

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}' - I_2 R_{29}}{R_{35}}. \quad (4)$$

Despejando I_3 de ec. (3):

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_{12}' + I_2 R_{29}}{R_{28}}. \quad (5)$$

Reemplazando ec. (4) y (5) en ec. (1) y despejando I_2 :

$$\frac{\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}' - I_2 R_{29}}{R_{35}} = I_2 + \frac{\mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_{12}' + I_2 R_{29}}{R_{28}},$$

$$\frac{\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}' - I_2 R_{29}}{R_{35}} = \frac{I_2 R_{28} + \mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_{12}' + I_2 R_{29}}{R_{28}},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12} R_{28} + \mathcal{E}_{12}' R_{28} - I_2 R_{29} R_{28} &= I_2 R_{28} R_{35} + \mathcal{E}_6 R_{35} - \mathcal{E}_{12}' R_{35} + I_2 R_{29} R_{35}, \\ - I_2 (R_{29} R_{28} + R_{28} R_{35} + R_{29} R_{35}) &= \mathcal{E}_6 R_{35} - \mathcal{E}_{12}' R_{35} - \mathcal{E}_{12} R_{28} - \mathcal{E}_{12}' R_{28}, \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_{12}' R_{35} + \mathcal{E}_{12} R_{28} + \mathcal{E}_{12}' R_{28} - \mathcal{E}_6 R_{35}}{R_{29} R_{28} + R_{28} R_{35} + R_{29} R_{35}}.$$

Reemplazando los datos:

$$I_2 = \frac{12\text{ V} \cdot 35\ \Omega + 12\text{ V} \cdot 28\ \Omega + 12\text{ V} \cdot 28\ \Omega - 6\text{ V} \cdot 35\ \Omega}{(29 \cdot 28 + 28 \cdot 35 + 29 \cdot 35)\ \Omega^2},$$

$$I_2 = \frac{(672 + 420 - 210)\text{ V} \cdot \Omega}{(980 + 812 + 1015)\ \Omega},$$

$$I_2 = 0,31\text{ A}.$$

(6)

Evalúando ec. (6) y cada dato respectivamente en ec. (4):

$$I_1 = \frac{12\text{ V} + 12\text{ V} - (0,3 \cdot 29)\text{ V}}{35\ \Omega} \rightarrow I_1 = 0,42\text{ A}.$$

Evaluando ec.(6) y cada dato respectivamente en ec.(5)

$$I_3 = \frac{6V - 12V + (0,3 \cdot 29)V}{28 \Omega},$$

$$I_3 = 0,10 \text{ A.}$$

2. Considere la espira que conduce corriente mostrada en la Figura 2, formada por líneas radiales y segmentos de círculos cuyos centros están en el punto P . Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en P .

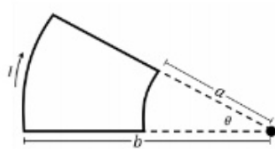
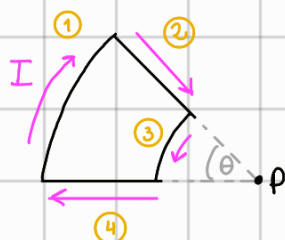


Figura 2

Por principio de superposición, el campo total estará dado por la suma de los campos en cada lado de la espira:



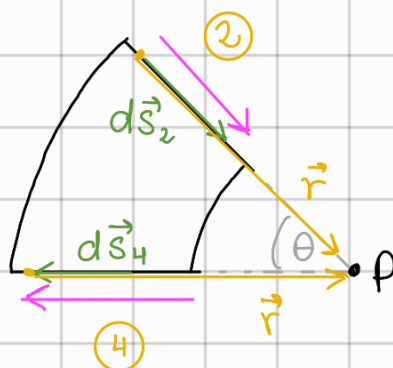
El campo total $\vec{B}$ es:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4. \quad (1)$$

Dado que el campo es generado por la corriente I que circula en la espira utilizaremos la ley de Biot - Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (2)$$

Notamos que el diferencial de camino para ② y ④ es paralelo a $\hat{r}$, como podemos ver en la siguiente figura:



Por lo tanto el producto cruz entre estas variables es cero :

$$\circ d\vec{s}_2 \times \hat{r} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\circ d\vec{s}_4 \times \hat{r} = \vec{0} \quad (3)$$

El campo magnético en los segmentos ② y ④ es :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}_2 \times \hat{r}}{r^2}, \quad (4)$$

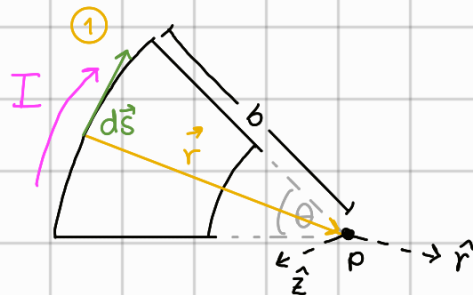
$$\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}_4 \times \hat{r}}{r^2}. \quad (5)$$

Evalutando el producto cruz de (2) y (3) en (4) y (5) respectivamente, los campos serán:

$$\vec{B}_2 = \vec{0}, \quad (6)$$

$$\vec{B}_4 = \vec{0}. \quad (7)$$

Para el campo $\vec{B}_1$ tenemos el diferencial de camino $d\vec{s}_1$ tangencial a la espira, en una dirección perpendicular a $\hat{r}$, donde se puede ver en la siguiente figura:



Con ec. (2) de Biot - Savart tenemos para $\vec{B}_1$:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s}_1 \times \hat{r}}{r^2}. \quad (8)$$

Donde la magnitud del diferencial de camino es :

$$ds_1 = b d\theta. \quad (9)$$

Con regla de la mano derecha el producto cruz tendrá dirección en $-\hat{z}$, además, la distancia entre el punto P y la espira está dada por el radio b. Entonces reemplazando (9) en (8) y trabajando con lo dicho, tenemos:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{b d\theta}{b^2} (-\hat{z}),$$

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\theta}{b} (-\hat{z}).$$

Integramos para encontrar el campo $\vec{B}_1$:

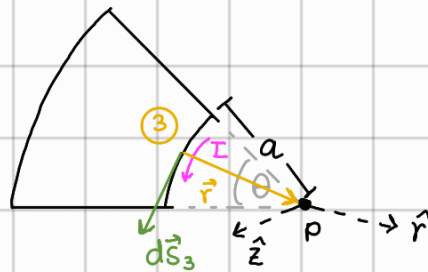
$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\theta}{b} \hat{z}.$$

En este caso, tanto la corriente como el radio son constantes, mientras que el ángulo varía de un ángulo 0, hasta completar el ángulo θ del segmento circular de la espira:

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_0^\theta d\theta \hat{z},$$

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I \theta}{4\pi b} \hat{z}. \quad (10)$$

Para el campo $\vec{B}_2$ el procedimiento es análogo entonces, tenemos el siguiente diagrama para la situación:



La magnitud del diferencial de camino ds_3 es:

$$ds_3 = a d\theta. \quad (11)$$

Con la regla de la mano derecha, la dirección del producto cruz estará hacia $\hat{z}$, mientras que, la distancia entre P y la espira corresponde al radio a . Entonces, considerando lo dicho anteriormente y reemplazando (11) en (2):

$$d\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a d\theta}{a^2} \hat{z},$$

$$d\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I d\theta}{4\pi a} \hat{z}.$$

Integramos a ambos lados, donde la corriente I y el radio a también son constantes. Y nuevamente el ángulo va a variar entre 0 y θ :

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\theta d\theta \hat{z},$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi a} \hat{z}. \quad (12)$$

Finalmente, reemplazamos (6), (7), (10) y (12) en (1), obteniendo así el valor del campo magnético $\vec{B}$ en ρ :

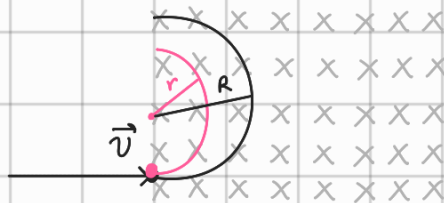
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I \theta}{4\pi b} \hat{z} + \vec{0} + \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi a} \hat{z} + \vec{0},$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \hat{z}.$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \hat{z}$$

3. Dos isótopos de un elemento químico, cargados con una sola carga positiva y con masas de $19,91 \times 10^{-27}$ kg y $21,59 \times 10^{-27}$ kg respectivamente, se aceleran hasta una velocidad de $6,7 \times 10^5$ m/s. Seguidamente, entran en una región en la que está presente un campo magnético uniforme de 0,85 T y perpendicular a la velocidad de los iones. Determinar la relación entre los radios de las trayectorias que describen las partículas y la separación de los puntos de incidencia de los isótopos cuando han recorrido una semicircunferencia.

Suponiendo que la dirección del campo magnético es hacia adentro, tenemos:



Al entrar las partículas perpendicularmente al campo magnético, actúa sobre ellas la fuerza de Lorentz que les obliga a describir una trayectoria circular. Aplicando segunda Ley de Newton:

$$qvB = ma_c \quad (B \perp v)$$

Para el de menor masa, describe una trayectoria circular de radio r , así entonces:

$$qvB = m_1 \frac{v^2}{r},$$

$$r = \frac{m_1 v}{qB}. \quad (1)$$

Mientras que para el isótopo de masa mayor, con un radio R :

$$R = \frac{m_2 v}{qB} \quad (2)$$

La relación entre los radios, con (1) y (2):

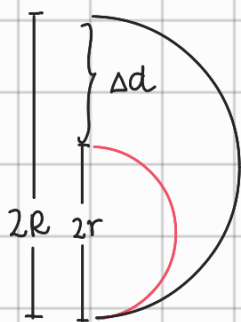
$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{m_1 v}{qB}}{\frac{m_2 v}{qB}},$$

$$\frac{r}{R} = \frac{m_1}{m_2},$$

$$\frac{r}{R} = \frac{19,91 \times 10^{-27} \text{ kg}}{21,59 \times 10^{-27} \text{ kg}},$$

$$\frac{r}{R} = 0,92.$$

La separación entre sus posiciones de incidencia están dadas por la diferencia de sus diámetros:



$$\Delta d = 2R - 2r,$$

$$\Delta d = 2(R - r).$$

(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$\Delta d = 2 \left(\frac{m_2 v}{qB} - \frac{m_1 v}{qB} \right),$$

$$\Delta d = \frac{2v}{qB} (m_2 - m_1).$$

Dado que son cargas positivas $q = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$, evaluamos los datos en (4)

$$\Delta d = \frac{2 \cdot 6,7 \times 10^5 \text{ m/s}}{1,602 \times 10^{-19} \cdot 0,85 \text{ T}} \left(21,59 \times 10^{-27} - 19,91 \times 10^{-27} \right) \text{ kg},$$

$$\Delta d = 0,016 \text{ m}.$$