Ayudantia 2: Topologia en $\mathbb{R}^n$

Lautaro Sandoval, Andres Vasquez
Profesor: Alvaro Castañéda

7 de abril de 2023

---

1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere el conjunto

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + \beta y + 3z = \alpha \ \ , \ \ x + 52y + \beta z = 3\alpha \ \ , \ \ 3x + 23y + 2z = 2\alpha\right\}$$

Demuestre que C es un conjunto cerrado.

Solución:
Partiremos notando que nuestro conjunto C se puede escribir como $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3$ con

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + \beta y + 3z = \alpha\right\} \\
C_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 52y + \beta z = 3\alpha\right\} \\
C_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 23y + 2z = 2\alpha\right\}
\end{aligned}$$

Por ende, si demostramos que todos estos subconjuntos son cerrados demostraremos que el conjunto C, al ser intersección finita de conjuntos cerrados, es también un conjunto cerrado.
Para demostrar que los subconjuntos son cerrados demostraremos que su complemento es abierto, es decir para todo $\vec{x} \in {C_i}^c$ existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \subseteq {C_i}^c$
Es preciso notar ahora que todos los subconjuntos presentados se tratan de planos en $\mathbb{R}^3$ [1] por ende, podemos usar la *Formula para la distancia entre un punto y un plano* la cual es de la forma

$$d(\vec{P}, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Donde π es el plano dado por la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ y $\vec{P}$ es el punto dado por $\vec{P} = (x_0, y_0, z_0)$
Así, tomaremos un punto arbitrario $\vec{x}_{i\in\{1,2,3\}} = (x_i, y_i, z_i)$ el cual cumple $\vec{x}_i \in {C_i}^c$ y calcularemos su distancia

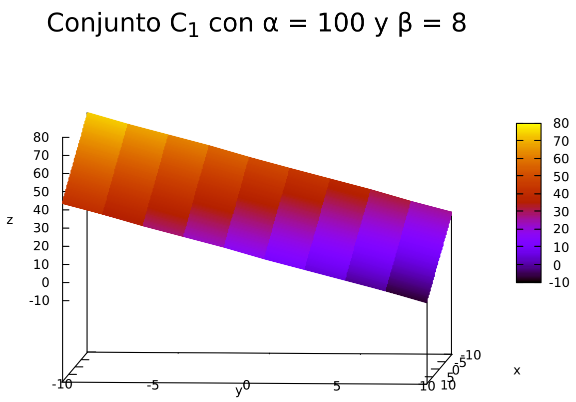

Figura 1: Ejemplo de conjunto C_1

[1] Recordar que un plano en $\mathbb{R}^3$ viene dado por una ecuación del tipo $Ax + By + Cz + D = 0$

al plano C_i

$$\begin{aligned}
d_1 = d(\vec{x}_1, C_1) &= \frac{|5x_1 + \beta y_1 + 3z_1 - \alpha|}{\sqrt{25 + 9 + \beta^2}} \\
d_2 = d(\vec{x}_2, C_2) &= \frac{|x_2 + 52y_2 + \beta z_2 - 3\alpha|}{\sqrt{1 + 52^2 + \beta^2}} \\
d_3 = d(\vec{x}_3, C_3) &= \frac{|3x_3 + 23y_3 + 2z_3 - 2\alpha|}{\sqrt{3^2 + 23^2 + 2^2}}
\end{aligned}$$

Ahora, tomando las bolas $B_1 = B_{\|\cdot\|_2}\left(\vec{x}_1, \frac{d_1}{2}\right)$, $B_2 = B_{\|\cdot\|_2}\left(\vec{x}_2, \frac{d_2}{2}\right)$ y $B_3 = B_{\|\cdot\|_2}\left(\vec{x}_3, \frac{d_3}{2}\right)$ podemos notar que, como elegimos un radio menor a la distancia hacia el plano, se cumple $B_1 \subseteq {C_1}^c$, $B_2 \subseteq {C_2}^c$ y $B_3 \subseteq {C_3}^c$ y por ende los conjuntos C_1, C_2 y C_3 son cerrados, demostrando asi que el conjunto C es cerrado $\square$.

2. Determine si cada una de las siguientes sucesiones es convergente. De ser convergentes calcule su limite.

(a)

$$\vec{x}_k := \left(\ln\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{k!}\right) \;,\; \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k \;,\; \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)$$

(b)

$$\vec{y}_k := \left(\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + k^3}{k^4} \;,\; \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{k!}\right)$$

(c)

$$\vec{z}_k := \left(b + \frac{n+3}{n^3+4} \;,\; \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \;,\; \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}\right) \qquad a > b \geq 0$$

Solucion:

a) Para esta sucesion nos centraremos en el termino $\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$. Intuitivamente podemos notar que este termino oscilara entre -1 y 1, por lo que no convergerá.
Llevando esta idea intuitiva a un argumento mas formal, tomaremos dos subsucesiones de $\vec{x}_k$, estas dos subsucesiones son

$$\begin{aligned}
\{s_{pos}\}_k &= \cos\left(\frac{8k\pi}{4}\right) = 1 \\
\{s_{neg}\}_k &= \cos\left(\frac{(8k+4)\pi}{4}\right) = -1
\end{aligned}$$

Ahora, como $\{s_{pos}\}_k$ y $\{s_{neg}\}_k$ convergen a puntos distintos, entonces la sucesión $\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$ no converge y por ende $\vec{x}_k$ tampoco converge
b) Partiremos notando

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

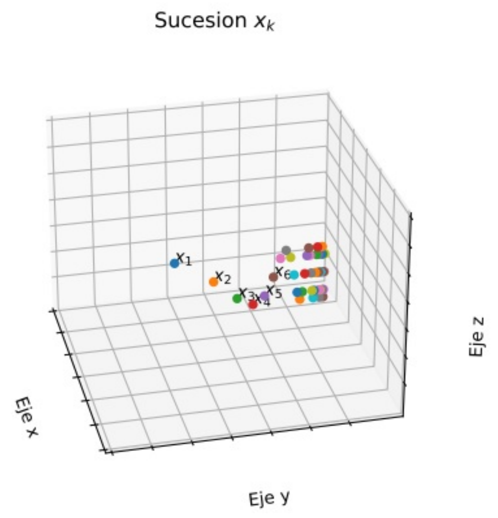

Figura 2: Sucesion $\vec{x}_k$

Asi, desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1^3+2^3+\cdots k^3}{k^4} &= \frac{k^2(k+1)^2}{4k^4} \\ &= \frac{k^2+2k+1}{4k^2} \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k^2}\end{aligned}$$

Y cuando $k \to \infty$ se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1^3+2^3+\cdots k^3}{k^4} = \frac{1}{4}$$

Para el termino $\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!}$ podemos notar que se trata de $\frac{k+1}{k!}$. Dado que el factorial crece mucho mas que la identidad, obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k!} = 0$$

Así, la sucesión $\vec{y}_k$ converge al punto $(1/4, 0)$

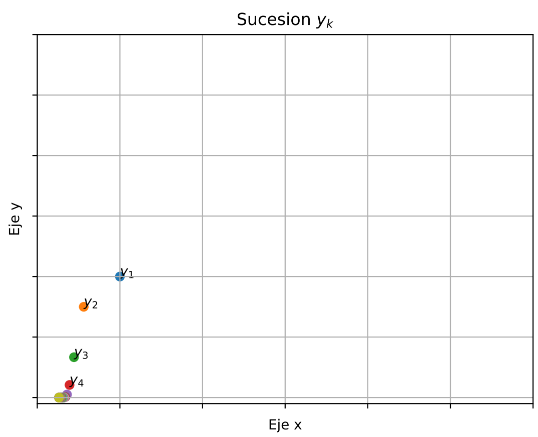

Figura 3: Sucesion $\vec{y}_k$

c) Partiremos con el termino $b+\frac{7k+3}{k^2+3k-4}$, para demostrar que esto converge utilizaremos descomposición en fracciones parciales, para esto debemos descomponer el polinomio k^2+3k-4 en dos monomios, estos monomios se obtienen encontrando la solución de la ecuación cuadrática. Así

$$b+\frac{7k+3}{k^2+3k-4}=b+\frac{7k+3}{(k+4)(k-1)}$$

Y entonces, esto puede ser escrito como

$$\frac{7k+3}{k^2+3k-4}=b+\frac{A}{k+4}+\frac{B}{k-1}$$

Podemos notar entonces que cuando $k\to\infty$ se cumple

$$\lim_{k\to\infty}\left[b+\frac{7k+3}{k^2+3k-4}\right]=b$$

.
Para el termino $\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ multiplicaremos por un uno conveniente dado por $\frac{a^n}{a^n}$ por ende.

$$\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Y cuando $k\to\infty$, debido a que $a>b$ se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=1$$

Para el ultimo termino nuevamente multiplicaremos por un uno conveniente, el cual estará dado por $\frac{2^k}{2^k}$. Así entonces

$$\frac{2^k+(-1)^k}{2^{k+1}+(-1)^{k+1}}=\frac{1+\frac{(-1)^k}{2^k}}{2+\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}}$$

Podemos notar entonces que los términos con numerador acotado y denominador creciente tienden a 0 se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^k+(-1)^k}{2^{k+1}+(-1)^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

Por ende, la sucesión $\vec{z}_k$ tiende al punto $(b,1,\frac{1}{2})$

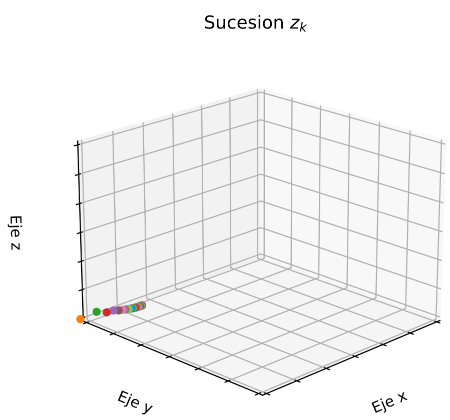

Figura 4: Sucesion $\vec{z}_k$

3. Sean α , $\eta \in \mathbb{R}$ con $alpha > 0$ y $\eta > 0$. Encuentre la adherencia, frontera e interior del conjunto

$$L := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(y^2 + z^2 < 1 \ , \ \ |x| < \eta \right) \vee \left((x,y,z) \in B_{\|\cdot\|_2}((\eta,0,0),\alpha) \ \right) \right\}$$

Hint: Le sera útil demostrar primero que para dos conjuntos M y N se cumple

$$\overline{(M \cup N)} = \overline{M} \cup \overline{N}$$

Solucion:

Partiremos demostrando el Hint, para ello debemos demostrar que se cumple $\overline{M \cup N} \subseteq \overline{M} \cup \overline{N}$ y también se debe cumplir $\overline{M} \cup \overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}$. Así, se procede a demostrar ambas contenciones.

Para la contención $\overline{M \cup N} \subseteq \overline{M} \cup \overline{N}$ tenemos que si $\vec{x} \in M \vee \vec{x} \in N$ entonces trivialmente $x \in \overline{M} \cup \overline{N}$, por lo que centraremos nuestra atención a los puntos que no pertenecen ni a M ni a N. Para uno de estos puntos de $\overline{M \cup N}$ debe existir una sucesión $\{\vec{y}_k\}$ de puntos en $M \cup N$ convergente a $\vec{x}$, si esta sucesión posee únicamente elementos en M o únicamente elementos en N entonces esta sucesión puede ser utilizada para demostrar que $\vec{x} \in \overline{M}$ o $\vec{x} \in \overline{N}$ respectivamente. Si esta sucesión posee tanto elementos en M como elementos en N entonces podemos tomar una subsucesión, digamos $\{\vec{z}_k\}$, que sea la sucesión $\{\vec{y}_k\}$ pero sin los puntos que pertenezcan a M o sin los puntos que pertenezcan a N, con lo cual esta subsucesion puede ser utilizada para demostrar $x \in \overline{M} \cup \overline{N}$

Para la contención $\overline{M} \cup \overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}$ asumiremos sin perdida de generalidad que $x \in \overline{M}$. Entonces, existirá una sucesión $\{\vec{y}_k\}$ convergente a $\vec{x}$ donde $y_k \in M \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Dado que $y_k \in M$ se concluye entonces que $y_k \in M \cup N$ y por ende esta sucesión sirve para demostrar $x \in \overline{M \cup N}$. Por ende queda demostrado $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

Habiendo demostrado esta propiedad y notando $L = L_1 \cup L_2$ con

$$\begin{aligned} L_1 &:= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1 \quad , \quad |x| < \eta \right\} \\ L_2 &:= B_{\|\cdot\|_2}\left((\eta,0,0),\alpha\right) \end{aligned}$$

Para encontrar $\overline{L_1}$ notaremos que se trata de un conjunto abierto (dado que es la intersección de dos conjuntos trivialmente abiertos). Recordamos entonces que la adherencia de un conjunto abierto es el cerrado minimal que lo contiene, el cual vendrá dado por

$$\overline{L_1} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1 \quad , \quad |x| \leq \eta \right\}$$

Para el conjunto L_2, recordaremos que la adherencia de una bola abierta es una bola cerrada de mismo centro y radio, así

$$\overline{L_2} = \overline{B_{\|\cdot\|_2}}\left((\eta,0,0),\alpha\right)$$

Y por ende usando $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ se obtiene

$$\boxed{\overline{L} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ \ |x| \leq \eta \right) \vee \left((x,y,z) \in \overline{B_{\|\cdot\|_2}}((\eta,0,0),\alpha) \ \right) \right\}}$$

Como notamos anteriormente, L_1 y L_2 son conjuntos abiertos, por lo cual se concluye que L es un conjunto abierto al ser unión de conjuntos abiertos. Recordamos entonces que el interior de un conjunto abierto es si mismo. Así

$$\boxed{\mathring{L} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(y^2 + z^2 < 1 \ , \ \ |x| < \eta \right) \vee \left((x,y,z) \in B_{\|\cdot\|_2}((\eta,0,0),\alpha) \ \right) \right\}}$$

Y finalmente, como la frontera viene dado por la adherencia sin los puntos que son parte del interior

$$\boxed{\partial L = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(y^2 + z^2 = 1 \ , \ \ |x| = \eta \right) \vee \left((x,y,z) : \|(x-\eta,0,0)\|_2 = \alpha \quad , \quad x > \eta \right) \right\}}$$