Ayudantía 1: Normas en $\mathbb{R}^n$

Lautaro Sandoval, Andrés Vasquez

Profesor: Alvaro Castañeda

24 de marzo de 2023

1. Considere la función $\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^4 \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$\|\vec{x}\|_* = 2(|x_2| + |x_3|) + \sqrt{|x_1|^2 + |x_4|^2}$$

(a) Demuestre que $\|\cdot\|_*$ define una norma en $\mathbb{R}^4$

(b) Demuestre que esta norma es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$

Sol.

(a) Partiremos demostrando la positividad (N1) de $\|\cdot\|_*$, para esto podemos notar que si $\vec{x} = (0, 0, 0, 0)$ entonces

$$\|(0, 0, 0, 0)\|_* = 2(|0| + |0|) + \sqrt{|0|^2 + |0|^2} = 0$$

Por otro lado, se tiene que si se cumple $\|(0, 0, 0, 0)\|_* = 0$ entonces

$$\|\vec{x}\|_* = 2(|x_2| + |x_3|) + \sqrt{|x_1|^2 + |x_4|^2} = 0$$

Ahora, como se tiene suma, multiplicación y raíz cuadrada de números que son positivos o 0, la única forma de que la expresión completa sea 0 es que todos sus términos sean 0, es decir

$$2|x_2| = 0$$

$$2|x_3| = 0$$

$$\sqrt{|x_1|^2 + |x_4|^2} = 0$$

Acá, es fácil ver que se debe cumplir $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Mostrando la homogeneidad (N2), calculamos $\|\lambda\vec{x}\|_*$. Así

$$\begin{aligned} \|\lambda\vec{x}\|_* &= \|\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4\|_* \\ &= 2(|\lambda x_2| + |\lambda x_3|) + \sqrt{|\lambda x_1|^2 + |\lambda x_4|^2} \end{aligned}$$

Utilizando propiedades de valor absoluto y factorizando

$$\begin{aligned}\|\lambda \vec{x}\|_* &= 2(|\lambda| |x_2| + |\lambda| |x_3|) + \sqrt{|\lambda|^2 (|x_1|^2 + |x_4|^2)} \\ &= 2|\lambda| (|x_2| + |x_3|) + |\lambda| \sqrt{|x_1|^2 + |x_4|^2} \\ &= |\lambda| \|\vec{x}\|_*\end{aligned}$$

Finalmente se demostrara la Desigualdad Triangular (N3). Para esto nos fijaremos en el termino de la raíz cuadrada presente en $\|\cdot\|_*$ el cual es $\sqrt{|x_1|^2 + |x_4|^2}$, podemos notar que este termino no es si no $\|(x_1, x_4)\|_2$ con $\|\cdot\|_2$ la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Así, se puede reescribir $\|\vec{x}\|_*$ como

$$\|\vec{x}\|_* = 2(|x_2| + |x_3|) + \|(x_1, x_4)\|_2$$

Así entonces, se tiene

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_* = 2(|x_2 + y_2| + |x_3 + y_3|) + \|(x_1 + y_1, x_4 + y_4)\|_2$$

Y finalmente, utilizando desigualdad triangular del valor absoluto y la norma euclídea se obtiene

$$\begin{aligned}\|\vec{x} + \vec{y}\|_* &\leq 2(|x_2| + |y_2| + |x_3| + |y_3|) + \|(x_1, x_4)\|_2 + \|(y_1, y_4)\|_2 \\ &\leq \|\vec{x}\|_* + \|\vec{y}\|_*\end{aligned}$$

(b) Podemos notar que, dado que la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^4$ se define como

$$\|\vec{x}\|_\infty = \text{máx} \{|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|\}$$

Entonces $\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_*$. Luego para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ se cumple $|x_i| \leq \|\vec{x}\|_\infty$, por ende

$$\begin{aligned}2(|x_2| + |x_3|) + \sqrt{|x_1|^2 + |x_4|^2} &\leq 2(\|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{x}\|_\infty) + \sqrt{\|\vec{x}\|_\infty^2 + \|\vec{x}\|_\infty^2} \\ &\leq (4 + \sqrt{2}) \|\vec{x}\|_\infty\end{aligned}$$

□

2. Sea $C [a, b]$ el espacio de las funciones de una variable continuas sobre $[a, b]$ y $f \in C$.

Considere la aplicación $\|\cdot\|_\infty : C \longrightarrow [0, \infty)$ definida por

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

Demuestre que $\|\cdot\|_\infty$ define una norma en C

Sol. Demostraremos que esta aplicación cumple los axiomas de norma.

Positividad (N1): Primero debemos notar que se nos pide demostrar

$$\|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = f_0$$

Donde $f_0(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Así, se nota fácilmente que

$$\|f_0\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f_0(t)| = 0$$

Luego, si se cumple

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t)| = 0$$

Sabemos que el termino $|f(t)|$ es mayor o igual a 0, siendo 0 únicamente cuando $f(t) = 0$. Esto nos deja como única opción que se deba cumplir $f(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$ lo cual es precisamente la definición de f_0

Homogeneidad (N2): Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ se obtiene, utilizando propiedades de valor absoluto

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= \max_{t \in [a, b]} |\lambda f(t)| \\ &= \max_{t \in [a, b]} (|\lambda| |f(t)|) \end{aligned}$$

Y utilizando propiedades de máximo

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= |\lambda| \max_{t \in [a, b]} |f(t)| \\ &= \lambda \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Desigualdad Triangular (N3): Siendo $f, g \in C$ se parte con

$$\|f + g\|_{\infty} = \max_{t \in [a, b]} |f(t) + g(t)|$$

Utilizando desigualdad triangular del valor absoluto

$$\|f + g\|_{\infty} \leq \max_{t \in [a, b]} (|f(t)| + |g(t)|)$$

Como dentro del máximo los dos términos que se suman son siempre positivos, se cumple

$$\|f + g\|_{\infty} = \max_{t \in [a, b]} |f(t)| + \max_{t \in [a, b]} |g(t)|$$

3.- Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\|\cdot\|$ una norma cualquiera en $\mathbb{R}^n$ demuestre la desigualdad

$$\begin{aligned} \ln(3) \left\| \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} \right\|^2 + 5 \left\| \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} \right\| \\ \leq \ln(3) \left[\frac{1}{2} \|\vec{x}\| + \frac{1}{2} \|\vec{y}\| \right]^2 + 5 \left[\frac{1}{2} \|\vec{x}\| + \frac{1}{2} \|\vec{y}\| \right] \end{aligned}$$

Sol. Partiremos reescribiendo términos para ahorrar escritura, así definimos

$$\phi = \left\| \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} \right\| \quad \varphi = \frac{1}{2} \|\vec{x}\| + \frac{1}{2} \|\vec{y}\|$$

Luego, nuestra desigualdad puede ser reescrita como

$$\ln(3)\phi^2 + 5\phi \leq \ln(3)\varphi^2 + 5\varphi$$

Definiendo la función $f(x) = \ln(3)x^2 + 5x$ nuevamente podemos reescribir la desigualdad, quedando así

$$f(\phi) \leq f(\varphi)$$

Es preciso notar ahora que la función $f(x)$ es una función creciente en el intervalo $[0, \infty)$. Dado que φ y ϕ vienen

dados por una norma y una suma de normas respectivamente, estos pertenecen al intervalo $[0, \infty)$ y por ende

$$f(\phi) \leq f(\varphi) \iff \phi \leq \varphi$$

Así, demostramos la desigualdad equivalente, la cual reescribiendo ϕ y φ como sus expresiones originales queda de la forma

$$\left\| \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} \right\| \leq \frac{1}{2}\|\vec{x}\| + \frac{1}{2}\|\vec{y}\|$$

Finalmente, utilizando homogeneidad (N2) y Desigualdad Triangular (N3) de la norma se obtiene

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) \right\| &\leq \frac{1}{2}(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|) \\ \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \end{aligned}$$

Así, demostramos que nuestra desigualdad inicial es equivalente a la desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|$ y por ende es verdadera para cualquier $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.