Álgebra y Geometria II
Ayudantías 8 y 9 de Junio 2023

Profesor de Cátedra: Andrés Navas
Ayudante: Javier Pavez

1. Determine si las siguientes funciones son transformaciones lineales. De serlo, determine su núcleo y su imagen.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donde $T(x, y, z) = (2x - 7z, 0, 3y + 2z)$.
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donde $T(x, y, z) = (y - 3x + \sqrt{2}z, x - 2y)$.
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, donde $T(x, y, z) = 100x - 8y + 25(y - z)$.
   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donde $T(x, y, z) = (x - y, |z|)$.
   e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $T(x, y) = xy$.
   f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $T(x, y) = \sqrt{xy}$.
   g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde $T(x, y) = (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y, -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$, donde $\theta \in [0, 2\pi)$.
   h) $T : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, donde

   $$T \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{1,1} - a_{1,2} & a_{1,3} + 2a_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   i) $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$, donde $T(f) = f'$.
   j) $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$, donde $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$.

2. De un ejemplo de una transformación lineal que es sobreyectiva pero no inyeciva.

3. Sea $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle$. Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S = Ker(T)$.

4. Demuestre que si $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ es lineal y su núcleo es $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 5y \wedge z = 7t\}$, entonces T es sobreyectiva.

5. Determine si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ tal que su núcleo sea

   $$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 = 3x_2 \wedge x_3 = x_4 = x_5\}$$

6. Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes:

   a) $Im(T) \cap Ker(T) = \{0_v\}$.
   b) $T(T(v)) = 0_v \Rightarrow T(v) = 0_V$.

7. Sean U, V y W espacios vectoriales y $T : U \to V$ y $S : V \to W$ transformaciones lineales. Demuestre que

   $$dim(Ker(ST)) \leqslant dim(Ker(S)) + dim(Ker(T)).$$