Álgebra y Geometria II
Ayudantía 25 de Mayo 2023

Profesor de Cátedra: Andrés Navas
Ayudante: Javier Pavez

1. Determine $k \in \mathbb{R}$ tal que los siguientes sistemas tengan única, infinitas y ninguna solución.

   a)

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= k \\ 2x + 3ky - z &= 1 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} x - 3z &= -3 \\ 2x + ky - z &= -2 \\ x + 2ky + kz &= 1 \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{aligned}$$

2. Sea $W = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \bigoplus (z, w) = (x + z, 0)$. Determine si W con dichas operaciones es un espacio vectorial real. Justifique.

3. Sean $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales reales. Se definen las siguientes operaciones en $V_1 \times \cdots \times V_n$:

   i) $(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$
   ii) $\lambda(v_1, \ldots, v_n) = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

   Demuestre que con estas operaciones $V_1 \times \cdots \times V_n$ es un espacio vectorial real.

4. Demuestre que $\mathbb{R}$ con las operaciones obvias tiene solo subespacios triviales.

5. Determine cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ son subespacios:

   a) $S_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f \text{ es continua}\}$.
   b) $S_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(t) = f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$.
   c) $S_3 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | -f(t) = f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$.
   d) $S_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(t) = f(1 - t), \forall t \in \mathbb{R}\}$.
   e) $S_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(t) = t + f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$.

6. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ fija. Determine si $\{B \in M_n(\mathbb{R}) | BA = AB\}$ es un subespacio de $M_n(\mathbb{R})$.

7. Determine todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

8. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | \lim_{x \to x_0} f(x) = y\}$. Determine para que valores de y este subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es un subespacio vectorial.