

## Problemas

### Taller 13

#### Cálculo I

1. Sea  $g(x) := |x^3|$  para  $x \in \mathbb{R}$ . Encuentre  $g'(x)$  y  $g''(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ , y  $g'''(x)$  para  $x \neq 0$ . Muestre que  $g'''(0)$  no existe.
2. Pruebe usando el Teorema del Valor Medio que la función seno es una función Lipchitz de constante de Lipchitz 1. Es decir, muestre que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  vale que

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq |x - y|.$$

#### Álgebra y Geometría I

1. Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Demuestre que  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ . Interprete geoméricamente esta igualdad.
2. Sean  $z_1, z_2, z_3$  los vértices de un triángulo equilátero. Demuestre que:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1.$$

#### Aritmética y Combinatoria

1. Para los siguientes enteros  $n \in \mathbb{N}$ , decida si éste se puede escribir como suma de dos cuadrados. Si es el caso, encuentre una manera de escribirlo como una tal suma.
  - $5508 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 17$ ;
  - $2210 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$ ;
  - $1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ;
  - $533610 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^2$ ;
2. Para los siguientes enteros de Gauss  $z$  y  $w$ , encuentre  $q$  y  $r$  en  $\mathbb{Z}[i]$  tales que  $z = qw + r$  con  $N(r) < N(w)$ .
  - $z = 8 + 5i, w = 1 + 3i$ ;
  - $z = 12 + 3i, w = 3 + i$ ;
  - $z = 13 - 17i, w = 2 + 5i$ .