Taller de Ejercicios
Semestre de
Primavera 2023

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Problemas Taller de Ejercicios

Índice

1. Cálculo I **2**
1.1. Taller 1 2
1.2. Taller 2 3
1.3. Taller 3 8
1.4. Taller 4 9
1.5. Taller 5 13
1.6. Taller 6 15
1.7. Taller 7 19
1.8. Taller 8 20

2. Álgebra y Geometría I **20**
2.1. Taller 1 20
2.2. Taller 2 22
2.3. Taller 3 23
2.4. Taller 4 25
2.5. Taller 5 26
2.6. Taller 6 27
2.7. Taller 7 29
2.8. Taller 8 29

3. Aritmética y Combinatoria **29**
3.1. Taller 1 29
3.2. Taller 2 31
3.3. Taller 3 33
3.4. Taller 4 35
3.5. Taller 5 37
3.6. Taller 6 39
3.7. Taller 7 43
3.8. Taller 8 43

§1.
Cálculo I

1.1. Taller 1

1. Dados los siguientes enunciados, indique si son o no afirmaciones condicionales (es decir, implicaciones). Si lo son, indique la hipótesis y la tesis. Además escriba la negación de cada item.

   a) Toda función polinomial es una función continua.

   b) Existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que para todo $b \in \mathbb{R}$ se tiene $a \cdot b = b$.

   c) Sea $f : X \to Y$ función. Si Y es finito y f es inyectiva entonces X es finito.

   d) Una función posee función inversa si y solo si es biyectiva.

   e) La suma de funciones derivables es una función derivable.

   Respuesta: Si la afirmación es condicional, mostraremos la hipótesis y tesis en rojo.

   a) Esta afirmación es condicional y puede ser reformulada de la siguiente forma:

   Si f es una función polinomial entonces f es una función continua.

   b) Esta afirmación no es condicional.

   c) Esta afirmación es condicional y puede ser reformulada de la siguiente forma

   Si $f : X \to Y$ es una función inyectiva e Y es finito entonces X es finito.

   d) Esta afirmación es una equivalencia.

   e) Esta afirmación es condicional y puede ser reformulada de la siguiente forma:

   Si f y g son funciones derivables entonces $f + g$ es una función derivable.

2. Dados A y B conjuntos. Demuestre las Leyes de De Morgan:

   a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,

   b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

   Respuesta: Antes de empezar, recordemos que para demostrar que dos conjuntos son iguales, debemos probar que estos contienen los mismos elementos.

a) Sea $x \in (A \cap B)^c$, es decir, $x \notin (A \cap B)$. Esta última afirmación es equivalente a la afirmación

$$-[x \in A \wedge x \in B].$$

Luego, por las leyes de De Morgan, lo anterior equivale a

$$x \notin A \vee x \notin B,$$

lo que es lo mismo a decir que

$$x \in A^c \vee x \in B^c,$$

es decir $x \in A^c \cup B^c$. Por lo tanto, $x \in (A \cap B)^c$ es equivalente a $x \in A^c \cup B^c$. En otras palabras, los conjuntos $(A \cap B)^c$ y $A^c \cup B^c$ tienen los mismos elementos por ende son iguales.

b) Sea $x \in (A \cup B)^c$, es decir, $x \notin (A \cup B)$. Esta última afirmación es equivalente a la afirmación

$$-[x \in A \vee x \in B].$$

Luego, por las leyes de De Morgan, lo anterior equivale a

$$x \notin A \wedge x \notin B,$$

lo que es lo mismo a decir que

$$x \in A^c \wedge x \in B^c,$$

es decir $x \in A^c \cap B^c$. Por lo tanto, $x \in (A \cup B)^c$ es equivalente a $x \in A^c \cap B^c$. En otras palabras, los conjuntos $(A \cup B)^c$ y $A^c \cap B^c$ tienen los mismos elementos por ende son iguales.

1.2. Taller 2

Definición 1.1. *Dado un real $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos $\sqrt[n]{a}$ como el real positivo tal que*

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Asumimos que dicho real existe. En el caso de $n = 2$ simplemente anotamos $\sqrt{a}$.

1. Demuestre que $\sqrt{3}$ no es un número racional. Además, trate de generalizar el argumento. Por ejemplo

   a) Puede generalizarlo para otros números distintos de 3?

b) Puede generalizar el argumento para raíces que no sean cuadradas (i.e. $n \neq 2$)?

Respuesta: Para demostrar que $\sqrt{2}$ era un número irracional se recurrió al siguiente resultado:

Lema 1.2. *Un número natural es par si y sólo si su cuadrado es par.*

Una reformulación de este resultado es: *un natural es divisible por 2 si y sólo si su cuadrado es divisible por 2*. De este modo, veremos que tres satisface una propiedad análoga.

Lema 1.3. *Un número natural es divisible por 3 si y sólo si su cuadrado es divisible por 3.*

Antes de probar la afirmación anterior probaremos el siguiente resultado, que es un poco más general que lo que necesitamos.

Lema 1.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural distinto de 1. Para todo número natural $k \in \mathbb{N}$ existen naturales $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $k = n \cdot a + b$, con $0 \leq b < n$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre k. Notemos que $1 = n \cdot 0 + 1$, por lo que la afirmación es cierta para 1. La afirmación de igual manera se comprueba para 2 y 3. En efecto, si $n > 2$, entonces basta con tomar $a = 0$ y $b = 2$. De lo contrario, $n = 2$ y, por tanto, bastará con tomar $a = 1$ y $b = 0$. Esto para 2. En el caso de 3, si $n > 3$ bastará con tomar $a = 0$ y $b = 3$. Si no es así dependerá de si n es 2 ó 3. Si $n = 3$, bastará con tomar $a = 1$ y $b = 0$. Por el contrario, si $n = 2$, bastará con tomar $a = b = 1$. Ahora, supongamos que la afirmación es cierta para algún $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$ y para todo $l \in \mathbb{N}$ con $1 \leq l \leq k$, es decir, para todo l existen $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $l = n \cdot a + b$ y $0 \leq b < n$. Luego, sabemos que $k + 1 = n \cdot a + b + 1$. Notemos que como $b < n$, se tiene que $b + 1 \leq n$. Luego, por hipótesis de inducción (note que es inducción fuerte), se tiene que $b + 1 = n \cdot a' + b'$ con $b' < n$. De esta manera se tiene que

$$n + 1 = n \cdot a + b + 1 = n \cdot a + n \cdot a' + b' = n(a + a') + b',$$

donde $a + a', b' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $b' < n$. Finalmente, por principio de inducción fuerte, se concluye que para todo número natural $k \in \mathbb{N}$ existen $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $k = n \cdot a + b$ con $0 \leq b < n$. $\square$

Demostración Lema 1.3. Veamos primero la implicancia de izquiera a derecha. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número divisible por 3, es decir, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $n = 3a$.

Luego, como $n^2 = (3a)^2 = 9a^2 = 3(3a^2)$, se sigue que n^2 también es divisible por 3. Probando de esta manera la implicancia izquierda-derecha.

Para probar la implicancia derecha-izquierda recurriremos a la contrarreciproca, es decir, probaremos la afirmación: *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n no es divisible por 3, entonces n^2 no es divisible por 3.*

Una consecuencia directa del Lema 1.4 es que todo número natural se escribe como $3k$, $3k+1$ ó $3k+2$. En particular, si un número no es divisible por 3 entonces o es de la forma $3k+1$ ó $3k+2$. Luego, si suponemos que n no es divisible por 3, entonces o bien $n = 3k+1$ ó $n = 3k+2$. Notemos que en el primer caso, si elevamos al cuadrado obtenemos

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1.$$

Si n^2 fuese divisible por 3, entonces 1 sería divisible por 3, que es un absurdo. Entonces, en este caso, n^2 tampoco es divisible por 3. En el segundo caso, $n = 3k+2$, se tiene que

$$n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 6k + 4 = 3(3k^2 + 2k + 1) + 1.$$

Si n^2 fuese divisible por 3, entonces 1 sería divisible por 3, que es un absurdo. De esta manera se concluye que si n no es divisible por 3, entonces su cuadrado no es divisible por 3.

Finalemente, un número es divisible por 3 si y sólo si su cuadrado también lo es. $\square$

Ahora probaremos el enunciado. Supongamos lo contrario. Supongamos que $\sqrt{3}$ es un número racional, es decir, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ con $mcd(a, b) = 1$. De esta manera se tiene que

$$3 = (\sqrt{3})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2},$$

que de manera equivalente se escribe como $3b^2 = a^2$. Esto implica que a^3 es divisible por 3 y, por el Lema 1.3, se sigue que a también es divisible por 3, es decir, $a = 3a'$ para cierto $a' \in \mathbb{N}$. Reemplazanto esto en lo anterior se se tiene que $3b^2 = (3a')^2 = 9a'^2$ y, por tanto, $b^2 = 3a'^2$. Nuevamente, por el Lema 1.3, se tiene que ahora b es divisible por 3. Esto es una contradicción, pues supusimos que a y b no tenían factores comunes por representar una fracción irreducible. Esto prueba que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

a) Esto se puede generalizar para cualquier número entero n que satisfaga la siguiente condición: *Existe un primo p tal que p divide a n, pero p^2 no divide a n.* Sin embargo, esto no lo probaremos por ahora. La generalización que daremos es para los números primos, es decir, la raiz cuadrada de todo número primo es irracional. La demostración es esencialmente la misma y descanza sobre esta generalización del Lema 1.3.

Lema 1.5. *Sea p un número primo. Un número entero n es divisible por p si y sólo si n^2 es divisible por p.*

2. Encuentre todas las soluciones reales de las siguientes inecuaciónes:

   a)
$$|x+1| + |x-1| < 2$$

   b)
$$\left|\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}\right| \geq 1.$$

Respuesta:

a) Estudiaremos esta inecuación en tres casos:

- Si $x < -1$, entonces la inecuación queda
$$-(x+1) - (x-1) < 2$$
o equivalentemente,
$$-2x < 2,$$
es decir, $x > -1$. Por lo tanto, en este caso no tenemos solución a la inecuación;
- Si $-1 \geq x \leq 1$, entonces la inecuación queda
$$(x+1) - (x-1) < 2$$
o equivalentemente,
$$2 < 2,$$
pero esto no ocurre. Luego en este caso tampoco tenemos solución a la inecuación.
- Si $x > 1$, entonces la inecuación queda
$$(x+1) + (x-1) < 2,$$
o equivalentemente,
$$2x < 2,$$
es decir $x < 1$. Por lo tanto, en este caso tampoco tenemos soluciones a la inecuación.

En consecuencia, la inecuación no tiene soluciones.

b) Primero notemos que

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x-3} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-1)}.$$

Luego, tenemos la siguiente inecuación:

$$|(x-2)(x+2)| \geq |(x+3)(x-1)|. \tag{1}$$

Es importante notar que el conjunto solución X' de esta nueva inecuación contiene al conjunto solución X de la inecuación original. Más fuertemente, estos conjuntos únicamente se diferencian en la presencia de los $x \in \mathbb{R}$ que anulan al denominador de la fracción. En otras palabras, $X = X' - \{-3, 1\}$.
Ahora, notemos que la parábola $x^2 - 4$ es no negativa en $(-\infty, 2] \cup [2, \infty)$ y es negativa en $(-2, 2)$. De igual forma, la parábola $x^2 + 2x - 3$ es no negativa en $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$ y negativa en $(-3, 1)$. Así separamos la resolución de la inecuación (1) en los siguientes casos:

- Si $x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$, entonces la inecuación queda

  $$x^2 - 4 \geq x^2 + 2x - 3$$

  o equivalentemente,

  $$2x \leq -1,$$

  es decir, $x \leq -\frac{1}{2}$. Luego el conjunto solución en este caso es $(-\infty, -3]$.
- Si $x \in (-3, -2]$, entonces la inecuación queda

  $$x^2 - 4 \geq -x^2 - 2x + 3,$$

  o equivalentemente,

  $$2x^2 + 2x - 7 \geq 0.$$

  es decir, $x \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{15}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{15}}{2}, \infty)$. Por lo tanto, $x \in (-3, \frac{-1-\sqrt{15}}{2}]$.
- Si $x \in (-2, 1)$, entonces la inecuación queda

  $$-x^2 + 4 \geq -x^2 - 2x + 3,$$

  o equivalentemente,

  $$2x \geq -1,$$

  es decir $x \geq -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, $x \in [-\frac{1}{2}, 1)$.
- Si $x \in [1, 2)$, entonces la inecuación queda

  $$-x^2 + 4 \geq x^2 + 2x - 3,$$

  o equivalentemente,

  $$2x^2 + 2x - 7 \leq 0.$$

  Luego $x \in (\frac{-1-\sqrt{15}}{2}, \frac{-1+\sqrt{15}}{2})$. Por lo tanto, $x \in [1, \frac{-1+\sqrt{15}}{2})$.

Por lo tanto, el conjunto solución X' es

$$X' = (-\infty, -3] \cup (-3, \frac{-1-\sqrt{15}}{2}] \cup [-\frac{1}{2}, 1) \cup [1, \frac{-1+\sqrt{15}}{2}).$$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación original es

$$X = (-\infty, -3) \cup (-3, \frac{-1-\sqrt{15}}{2}] \cup [-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{-1+\sqrt{15}}{2}).$$

1.3. Taller 3

Definición 1.6. *Dados A y B dos subconjuntos cualquiera de $\mathbb{R}$ anotamos $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ y $A \cdot B := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.*

1. Demuestre que $\sqrt{3}$ no es un número racional. Además, si puede, trate de generalizar el argumento. Por ejemplo

   a) Puede generalizarlo para otros números distintos de 3?

   b) Puede generalizar el argumento para raíces que no sean cuadradas (i.e. $n \neq 2$)?

2. Sean A y B dos subconjuntos acotados superiormente de $\mathbb{R}$.

   a) Demuestre que $A \cup B$ y $A + B$ son también conjuntos acotados superiormente. Además, es necesariamente $A \cdot B$ un conjunto acotado superiormente?

   b) Demuestre que $\sup(A) \leq \sup(B)$ cuando $A \subseteq B$, y que en general se tiene que $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup(A), \sup(B)\}$.

   c) Demuestre que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

   Respuesta:

   a) Sean c y d cotas superiores de A y B respectivamente. Primero, sea $x \in A \cup B$. Luego $x < c$ o $x < d$, o equivalentemente $x < \text{máx}(c, d)$. Por lo tanto, $A \cup B$ es acotado superiormente por $\text{máx}(c, d)$. Ahora, sea $x \in A+B$. Entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $x = a + b$. Sabemos que $a < c$ y $b < d$, por ende $x < c + d$. De esta forma concluimos que $A + B$ está acotado superiormente por $c + d$. Por último, notemos $A = B = (-\infty, 0)$ es un conjunto acotado superiormente. Sin embargo, $A \cdot B = (0, \infty)$ no es acotado superiormente.

b) Sea $a \in A$. Entonces $a \leq \sup(B)$ puesto que a es también un elemento de B y $\sup(B)$ es una cota superior de B. Luego $\sup(B)$ es una cota superior de A y por tanto $\sup(A) \leq \sup(B)$ puesto que $\sup(A)$ es la menor de las cotas superior de A. Más generalmente, por el mismo argumento dado en a), tenemos que $\text{máx}(\sup(A), \sup(B))$ es una cota superior de $A \cup B$. Por lo tanto, $\sup(A \cup B) \leq \text{máx}(\sup(A), \sup(B))$. Ahora, si $c \in \mathbb{R}$ es una cota superior de $A \cup B$, entonces c es una cota superior tanto de A como de B. Por lo tanto, $\sup(A)$ y $\sup(B)$ son menores que c. En consecuencia, $\sup(A \cup B) \geq \text{máx}(\sup(A), \sup(B))$ y por ende tenemos la igualdad.

c) Dado que para cualquieras cotas superiores c de A y d de B, tenemos que cualquier $x \in A+B$ satisface que $x \leq c+d$. En particular, $\sup(A)+\sup(B)$ es una cota de $A+B$. Por lo tanto, $\sup(A+B) \leq \sup(A)+\sup(B)$. Ahora, para obtener la igualdad

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B),$$

demostraremos que no puede ocurrir la desigualdad estricta. Supongamos que

$$\sup(A+B) < \sup(A) + \sup(B).$$

Entonces,

$$\epsilon = \sup(A) + \sup(B) - \sup(A+B) \neq 0.$$

Por caracterización de supremo, existen $a \in A$ y $b \in B$ tal que

$$\sup(A) - \frac{\epsilon}{2} < a \quad \text{y} \quad \sup(B) - \frac{\epsilon}{2} < b.$$

Luego,

$$a + b > \sup(A) + \sup(B) - \epsilon = \sup(A+B),$$

lo que es una contradicción pues $a + b \in A + B$. Por lo tanto,

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B).$$

1.4. Taller 4

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \\ -x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 3x + 2 & \text{si} \quad x \leq -1 \end{cases}$$

a) Demuestre que f es biyectiva.

b) Calcule la inversa

Respuesta:

a) Para probar que es biyectiva, probaremos que es inyectiva y sobreyectiva.

Sobreyectividad. Para demostrar que f es sobreyectiva, demostraremos que la unión de los recorridos de cada rama es todo el codominio de f, es decir, todo $\mathbb{R}$. Más precisamente, si definimos las funciones ramas

$$\begin{aligned} f_1 : [1,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2^x - 1, \\ f_2 : (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x, \\ f_3 : (-\infty,-1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x+2, \end{aligned}$$

Entonces tendremos que probar que

$$\mathbb{R} = \operatorname{rec}(f_1) \cup \operatorname{rec}(f_2) \cup \operatorname{rec}(f_3).$$

Primero notemos que f_1 es una función creciente pues si $x < y$ entonces $2^x < 2^y$. Además, f_1 no está acotada superiormente pues no existe $R \in \mathbb{R}$ tal que $2^x < R$ para todo $x \in [1,\infty)$. Por lo tanto, para saber el recorrido de f_1 sólo nos basta conocer su valor en $x = 1$, el cual es 1. Por último, notemos que si $y \in [1,\infty)$, entonces $f_1(\log_2(y+1)) = y$ donde $\log_2(y+1) \in [1,\infty)$. Por lo tanto, $\operatorname{rec}(f_1) = [1,\infty)$.
Ahora, dado que f_2 y f_3 son funciones lineales, calcular su recorrido es sencillo. Así,

$$\operatorname{rec}(f_2) = (-1,1) \quad \text{y} \quad \operatorname{rec}(f_3) = (-\infty,-1].$$

De esta forma vemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{rec}(f_1) \cup \operatorname{rec}(f_2) \cup \operatorname{rec}(f_3) &= [1,\infty) \cup (-1,1) \cup (-\infty,-1) \\ &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Más aún, notemos que los recorridos son disjuntos entre sí. Esto será particularmente útil para demostrar la inyectividad.

Inyectividad. Como los recorridos de la funciones ramas son disjuntos, bastará probar que cada rama es una función inyectiva. En efecto, si tomamos $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$, entonces x, y tienen que estar ambos en alguno de los dominios de f_1, f_2 o f_3. De lo contrario, la igualdad no podría ser satisfecha dada la disjunción de los recorridos de las funciones ramas. Entonces:

- Sean $x, y \in [1,\infty)$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces $2^{(x-y)} = 1$. Lo que ocurre si y sólo si $x = y$.

- Sean $x, y \in (-1, 1)$ tales que $f(x) = f(y)$. Luego $-x = -y$. Por lo tanto $x = y$.
- Sean $x, y \in (\infty, -1)$ tales que $f(x) = f(y)$. Luego $3x = 3y$. Por lo tanto, $x = y$.

De esta forma concluimos que f es inyectiva por ramas y por lo dicho anteriormente sobre los recorridos de las funciones ramas, esto implica que f es inyectiva.

b) La función inversa de f será función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por ramas donde las ramas vendrán dadas por las inversas de las funciones f_1, f_2 y f_3 (Ojo: aquí restringimos las funciones f_1, f_2 y f_3 a sus recorridos para que tenga sentido hablar de su inversa). Así, f^{-1} vendrá dada por la siguiente expresión:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \log_2(x+1) & \text{si } x \geq 1 \\ -x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{x-2}{3} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}.$$

2. En cada caso, determine si existe el limite $L = \lim x_n$. De ser así, calcularlo. Justifique sus afirmaciones.

   a) $x_n = \dfrac{\operatorname{sen}(3n+1)}{3^n+1}$

   b) $x_n = \dfrac{2023 \cdot n}{2^n}$

   c) $x_n = \cos(\pi n)$

   Respuesta:

   a) El límite existe, para probar esto note que $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular si evaluamos en la sucesión $3n+1$, por lo tanto

   $$-\frac{1}{3^n+1} \leq \frac{\operatorname{sen}(3n+1)}{3^n+1} \leq \frac{1}{3^n+1}$$

   para todo número natural n, ahora observe que $n < 3^n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto se tiene que

   $$-\frac{1}{n} \leq \frac{-1}{3^n+1} < \frac{1}{3^n+1} \leq \frac{1}{n}$$

   Ahora aplicamos esta desigualdad a la anterior

   $$-\frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen}(3n+1)}{3^n+1} \leq \frac{1}{n}$$

entonces al tomar el limite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(3n+1)}{3^n+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

Entonces

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(3n+1)}{3^n+1} \leq 0$$

Por el Teorema el Sandwich se tiene que el límite existe y es 0.

b) Primero, probemos la siguiente afirmación: Para todo $n \geq 4$ se tiene que $2^n \geq n^2$. Procederemos por inducción. Notemos que $2^4 = 16 \leq 16 = 4^2$ es cierto. Supongamos que se cumple para algún $n \geq 4$, es decir, $2^n \geq n^2$ es cierto. De esta manera, por hipótesis de inducción,

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq {}^{1}2 \cdot n^2 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Así, por Principio de Inducción, probamos nuestra afirmación.
Usando nuestra afirmación, podemos deducir la siguiente desigualdad

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n},$$

para $n \geq 5$. Entonces,

$$0 \leq x_n = \frac{2023n}{2^n} \leq \frac{2023}{n},$$

para $n \geq 5$. Luego, por el Teorema del Sandwich,

$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2023}{n} = 0.$$

Concluimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

c) El límite no existe, primero probaremos por inducción que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, lo cual es una consecuencia de que $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$. **B.I:** Para $n = 1$ se tiene que $\cos(n\pi) = \cos(\pi) = -1$, por lo que nuestro caso base se cumple. **H.I:** Supondremos para algún $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $cos(t\pi) = (-1)^t$ para todo $t \leq k$. **P.I** Tenemos que

$$\begin{aligned}
\cos((k+1)\pi) &= \cos((k-1+2)\pi) \\
&= \cos((k-1)\pi + 2\pi) \\
&= \cos((k-1)\pi) \\
&= (-1)^{k-1} \\
&= (-1)^{k-1}(-1)^2 \\
&= (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

[1] La desigual aquí es $n^2 \geq 2n+1$ para $n \geq 3$.

por el principio de inducción nuestra afirmación es correcta. Ahora ocuparemos la negación de la definición de límite para probar que el límite no existe, es decir vamos a probar que si $L \in \mathbb{R}$ entonces *existe* $\varepsilon > 0$ *para todo* $N_0 \in \mathbb{N}$*, existe* $n_0 > N_0$ *para el cual se tiene que* $|\cos(n\pi) - L| \geq \varepsilon$. Sea L un número real, y $N_0 \in \mathbb{N}$ con $n > N_0$. Observe que

$$| \, (\cos(nx) - L) - (\cos((n+1)\pi) - L) \, |= 2$$

Entonces, al escoger $0 < \varepsilon < 2$ vamos a tener que

$$| \, (cos(n\pi) - L) \, | \geq \varepsilon \text{ ó } \; | \cos((n+1)\pi - L \, | \geq \varepsilon$$

lo cual demuestra lo que queríamos. Así L no es límite de la sucesión, por lo tanto la sucesión no tiene límite.

1.5. Taller 5

1. En cada caso, determine si existe el limite $L = \lim a_n$. De ser así, calcularlo. Justifique sus afirmaciones.

   a) $a_n = \frac{2n^2+3n+1}{5n^2-1}$

   b) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

   c) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$

   Respuesta:

   a) Para calcular este límite recurrimos a la siguiente maniobra:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2n^2+3n+1}{5n^2-1} &= \frac{2n^2+3n+1}{5n^2-1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 - \frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

   Por esto se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

   b) Primero note que

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

ahora veamos que la sucesión a_n es decreciente. En efecto, observe que $n < n+1$, así $n^2 < (n+1)^2$, por ende $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$, usando que la función raíz cuadrada es creciente se tiene :

$$\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}} < \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

que es lo mismo que $a_{n+1} < a_n$, por lo tanto a_n es una sucesión decreciente. Como $0 < \frac{1}{n^2}$, entonces $1 = \sqrt{1} < \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = a_n$, por lo tanto la sucesión está acotada inferiormente por 1. Se tiene que a_n es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, lo que implica que tiene limite, así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{1} = 1.$$

c) Primero note que

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

en b) probamos que $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ es decreciente y acotado inferiormente por 1, por lo que se tiene

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = a_1$$

.

luego

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \leq \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

así $\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$ está acotada. Es sabido que $\frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, así tenemos la multiplicación de algo acotado por algo que se va a cero, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 0.$$

2. Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere la sucesión cuyo término n-esimo es $x_n = \frac{(x+1/n)^2 - x^2}{1/n}$. Demuestre que para todo x la sucesión (x_n) es convergente y calcule su límite (el cual, en principio, depende del x elegido).

   Respuesta: Sea $x \in \mathbb{R}$, ahora note que

$$\begin{aligned}\frac{(x+\frac{1}{n})^2-x^2}{\frac{1}{n}} &= \frac{\frac{2x}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{2xn+1}{\frac{n^2}{n}} \\ &= 2x+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x+1/n)^2-x^2}{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2x+\frac{1}{n} = 2x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto la sucesión x_n tiene límite y es $2x$.

1.6. Taller 6

Definición 1.7. *Dada una funcion $f : A \to A$, denotamos por $f^{(n)}$ la composicion de f consigo misma n veces. Asi, por ejemplo, $f^{(2)} = f \circ f$.*

1. Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

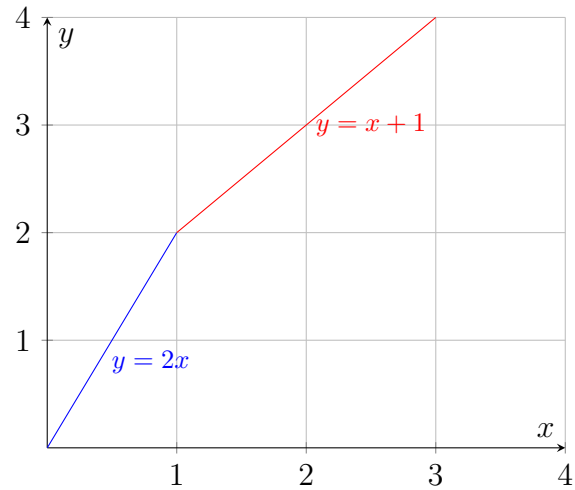
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

   a) Grafique ambas funciones

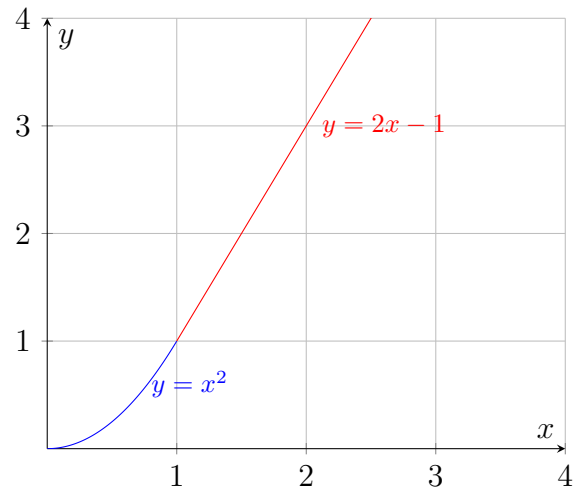
   b) Describa las fórmulas de $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ para $n = 2, 3, 4$. Al hacer esto, qué diferencias nota entre los casos de f y g. ¿Cuál cree usted que es la explicación? Elabore.

   Respuesta:

   a) La gráfica para f es algo como:



Y para g es la siguiente:



b) Comenzaremos trabajando con f. Para esto notemos que

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 2f(x) & \text{si } 0 \leq f(x) \leq 1 \\ f(x) + 1 & \text{si } 1 < f(x). \end{cases}$$

La condición $0 \leq f(x) \leq 1$ se satisface si $x \leq \frac{1}{2}$ y la condición $f(x) > 1$ se satisface si $x > \frac{1}{2}$. Así, tendríamos que

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x + 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ahora para determinar $f^{(3)}$ recordemos que $f^{(3)}(x) = f^{(2)}(f(x))$. Luego

$$f^{(3)}(x) = \begin{cases} 2f(x) & \text{si } 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \\ 2f(x)+1 & \text{si } \frac{1}{2} < f(x) \leq 1 \\ f(x)+2 & \text{si } f(x) > 1 \end{cases}$$

La condición $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ se satisface si $x \leq \frac{1}{4}$; la condición $\frac{1}{2} < f(x) \leq 1$ se satisface si $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}$; la condición $f(x) > 1$ se satisface si $x > \frac{1}{2}$. Así, tenemos que

$$f^{(3)}(x) = \begin{cases} 8x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 4x+1 & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+2 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Con un análisis parecido se determina la expresión para $f^{(4)}$, el cual es

$$f^{(4)}(x) = \begin{cases} 16x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{8} \\ 8x+1 & \text{si } \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4} \\ 4x+2 & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+3 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ x+4 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Con los cálculos hechos arriba, es fácil ver que $f^{(n)}$ estará definida por la siguiente expresión

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^n x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n} \\ 2^k x + (n-k) & \text{si } \frac{1}{2^k} < x \leq \frac{1}{2^{k-1}} \text{ con } k \in \{1, ..., n-1\} \\ x+n & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para el calculo de $g^{(n)}$ la situación es bastante más sencilla puesto que las ramas que definen la función se mantienen estables por composición, es decir $f(x) \in [0,1]$ si $x \in [0,1]$ y $f(x) \in (1,\infty)$ si $x \in (1,\infty)$. De esta forma, tenemos que

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} x^{2^n} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2^n x - (2^n - 1) & \text{si } 1 < x \end{cases}.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. *a*) Sea $a > 1$ y $k \in \mathbb{N}$. Muestre que la sucesión $s_n = \frac{n^k}{a^n}$ es convergente y calcule su limite.

b) Demuestre que la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

es convergente y converge a un número comprendido entre 1/2 y 1.

Respuesta:

a) Para demostrar que s_n es convergente, notemos que la sucesión

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)^k}{an^k}$$

converge a $\frac{1}{a} < 1$. Por lo tanto, existe un entero $N > 0$ tal que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} < 1$$

para todo $n \geq N$. En otras palabras, s_n es decreciente para $n \geq N$. Por lo tanto, s_n es convergente pues para $n \geq N$ esta sucesión es decreciente y positiva.

b) Para demostrar que esta sucesión es convergente, demostraremos que es una sucesión de Cauchy. Para esto notemos que

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+2}.$$

Ésta es una sucesión convergente a 0 por ser diferencia de dos sucesiones convergentes a 0. Por lo tanto, a_n es una sucesión de Cauchy. Para estimar al valor del límite de a_n, acotaremos los términos de la sucesión. Para esto notemos que cada a_n puede ser calculado sumando los extremos de la suma que lo define. Sin embargo, este arreglo depende de la paridad de n pues cuando n es impar el término central de la suma no se sumará con nadie. No obstante, como a_n es convergente, podemos reducirnos a la subsucesión b_n de a_n definida por los n pares, es decir $b_n = a_{2n}$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2n+i} + \frac{1}{4n-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{6n}{8n^2 + i(2n-i)}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que $i(2n-i)$ define una parábola con concavidad hacia abajo (esto si pensamos a i como la variable, es decir la parábola $y = 2ni - i^2$). Esto nos permite decir que $i(2n-i)$ será máximo cuando i sea la primera coordenada del vértice la de la parábola, es decir cuando $i = n$. Así, concluimos que

$$0 \leq i(2n-i) \leq n^2.$$

De esta forma, podemos decir que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{6n}{8n^2+n^2} \leq b_n \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{6n}{8n^2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{2(n+1)}{3n} \leq b_n \leq \frac{3(n+1)}{4n}.$$

En consecuencia $\lim a_n = \lim b_n \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$.

1.7. Taller 7

1. Decida si los siguientes límites existen en cuyo caso calculelos.

   a) $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$
   b) $\lim_{x\to\infty} \sin(x^2)$.
   c) $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$
   d) $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x^2)$.

   Respuesta:

   a) El límite no existe. Para probar esto razonaremos por absurdo. Supongamos que $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = L$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $k > 0$ tal que $x \geq k$ se tiene que $|\sin(x) - L| < \varepsilon$. Consideremos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $k > 0$ que cumple con la definición. Por la propiedad arquimedeana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > k$. Luego

   $$x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n > x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > k$$

   pero

   $$2 = |\sin(x_1) - \sin(x_2)| \leq |\sin(x_1) - L| + |L - \sin(x_2)| < 1/2 + 1/2 = 1$$

   Lo cual es una contradicción, por lo tanto el límite no existe.

   b) El límite no existe. Para porbar esto razonaremos por absurdo. Supongamos que $\lim_{x\to\infty} \sin(x^2) = L$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $k > 0$ tal que $x \geq k$ ze tiene que $|\sin(x^2) - L| < \varepsilon$.

2. Sea α un número real y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

   $$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

   a) Demuestre que para todo α la función f tiene limites laterales en 1. Calcúlelos.
   b) Encuentre el o los valores de α de modo que la función f sea continua en 1.

1.8. Taller 8

§2.
Álgebra y Geometría I

2.1. Taller 1

1. Definimos los enunciados p, q, r y s como:

   a) $p =$ "Ángelo viene a la fiesta".

   b) $q =$ "Bruno viene a la fiesta".

   c) $r =$ "Carlos viene a la fiesta".

   d) $s =$ "David viene a la fiesta".

   Escriba los siguientes enunciados con respecto a p y q:

   a) Si David viene a la fiesta, entonces Bruno y Carlos también vienen a la fiesta.

   b) Carlos viene a la fiesta sólamente si Ángelo y Bruno no vienen a la fiesta.

   c) David viene a la fiesta si y sólamente si Carlos viene a la fiesta y Ángelo no viene a la fiesta.

   d) Si David viene a la fiesta, entonces Carlos no viene a la fiesta pero Ángelo si viene a la fiesta.

   e) Una condición necesaria para que Ángelo venga a la fiesta es si Bruno y David vienen a la fiesta, y Carlos no viene a la fiesta.

   f) Ángelo, Bruno y Carlos vienen a la fiesta si y sólamente si David no viene a la fiesta.

   Respuesta: Los enunciados quedan escritos en símbolos de la siguiente forma:

   a) $s \Rightarrow (q \wedge r)$.

   b) $-(p \wedge q) \Rightarrow r$.

   c) $s \Leftrightarrow (r \wedge -p)$.

   d) $s \Rightarrow (-r \wedge p)$.

   e) $p \Rightarrow (q \wedge s \wedge -r)$.

   f) $(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow -s$.

2. Estás caminando en un laberinto y te encuentras con 3 caminos, un camino está pavimentado con oro, otro está pavimentado con mármol y el último está pavimentado con piedras. Cada calle tiene un guardián. Hablas con los guardianes y te dicen lo siguiente:

a) El guardián de la calle de oro: Esta calle te va a llevar al centro del laberinto, y si el camino de piedra te lleva al centro entonces el de mármol también lo hace.

b) El guardián de la calle de mármol: Ni la calle de oro ni la calle de piedra te llevan al centro.

c) El guardián de la calle de piedra: Si sigues el camino de oro llegarás al centro, y si sigues la calle de mármol no llegarás al centro.

Sabiendo que todos los guardianes mienten, ¿puedes saber qué calles te llevan al centro del laberinto? Si es así ¿Qué calle tienes que seguir?

Respuesta: Primero traduciremos a símbolos lógicos los que dice cada guardián. Para esto asignaremos las siguientes letras a las proposiciones sobre los caminos:

$$\begin{aligned} p &:= \text{el camino de oro lleva al centro del laberinto;} \\ q &:= \text{el camino de mármol lleva al centro del laberinto;} \\ r &:= \text{el camino de piedras lleva al centro del laberinto.} \end{aligned}$$

De esta forma, en símbolos lógicos, lo que nos dicen los guardianes es lo siguiente:

a) El guardián de la calle de oro: $p \wedge (r \Rightarrow q) \equiv p \wedge (-r \vee q) \equiv (p \wedge -r) \vee (p \wedge q)$.

b) El guardián de la calle de mármol: $-p \wedge -r$.

c) El guardián de la calle de piedras: $p \wedge -q$.

Sabemos que todos los guardianes mienten, entonces

$$(p \wedge -r) \vee (p \wedge q) \equiv F, \quad -p \wedge -r \equiv F, \quad p \wedge -q \equiv F.$$

Luego, aplicando leyes de De Morgan, obtenemos que

$$(-p \vee r) \wedge (-p \vee -q) \equiv V, \quad p \vee r \equiv V, \quad -p \vee q \equiv V.$$

De la primera equivalencia deducimos que

$$-p \vee r \equiv V, \quad -p \vee -q \equiv V.$$

De esta forma, concluimos que $-p = V$. Por lo tanto, $-r = F$, es decir $r = V$. Por lo tanto, la calle de piedras es una calle que te lleva al centro del laberinto. Respecto a la veracidad de q, no es posible determinarla con la información que tenemos.

2.2. Taller 2

1. Considere la frase $x + 5 = y$. Construya 3 enunciados diferentes agregando cuantificadores, interprételas y determine su valor de verdad. Ejemplo:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\ y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + 5 = y.$$

2. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera. Determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justifique su respuesta

   a) $(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq (B \cap C)$.

   b) $(A \subseteq B) \vee (A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq (B \cap C)$.

   c) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

   d) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

   Respuesta:

   a) Sea $a \in A$. Entonces decir que $a \in B \cap C$ es equivalente a decir que $a \in B$ y $a \in C$. Por lo tanto, $A \subseteq (B \cap C)$ es equivalente a la afirmación $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$.

   b) Esta afirmación es falsa. En efecto, consideremos $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{2\}$. Así vemos que la afirmación de la izquierda es verdadera mientras que la afirmación de la derecha es falsa.

   c) Recordemos que $B - C = B \cap C^c$. Entonces

$$\begin{aligned}(A \cap B) - (A \cap C) &= A \cap B \cap (A^c \cup C^c)\\ &= (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c)\\ &= A \cap (B \cap C^c)\\ &= A \cap (B - C).\end{aligned}$$

   Por lo que la afirmación es verdadera.

   d) Esta afirmación es falsa. Para mostrar esto consideremos los siguientes conjuntos: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$ y $D = \{4\}$. Luego

$$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(1, 2); (3, 4)\}$$

   y

$$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{((1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}.$$

   De esto forma vemos que $(A \times B) \cup (C \times D)$ y $(A \cup C) \times (B \cup D)$ son distintos.

2.3. Taller 3

1. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera. Determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

   a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

   b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.

   c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

   d) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

   e) $A \subseteq B$ si y solo si, $A \cap B^c = \varnothing$.

   Respuesta: Antes de empezar, sería bueno tener presente en la mente que los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son conjuntos. Ojo con esto que puede ser confuso.

   a) Esta afirmación es verdadera pues

   $$\begin{aligned}\mathcal{P}(A \cap B) &= \{x \subseteq A \cap B\} \\ &= \{x \subseteq A \wedge x \subseteq B\} \\ &= \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).\end{aligned}$$

   b) Esta afirmación es falsa. En efecto, consideremos $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$. Así vemos que $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ pero

   $$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}.$$

   En general, se tiene que

   $$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B).$$

   c) Esta afirmación es verdadera pues

   $$\begin{aligned}A \times (B \cup C) &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \cup C\} \\ &= \{(x, y) \mid (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \cup \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in C\} \\ &= (A \times B) \cup (A \times C).\end{aligned}$$

   d) Esta afirmación es verdadera. En efecto

   $$\begin{aligned}(A - B) \times C &= \{(x, y) \mid x \in (A \cap B^c) \wedge y \in C\} \\ &= \{(x, y) \mid (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B^c \wedge y \in C)\} \\ &= (A \times C) \cap (B^c \times C) \\ &= [(A \times C) \cap (B^c \times C)] \cup [(A \times C) \cap (B^c \times C^c)] \cup [(A \times C) \cap (B \times C^c)] \\ &= (A \times C) \cap (B \times C)^c \\ &= (A \times C) - (B \times C).\end{aligned}$$

e) Esta afirmación es verdadera. Primero recordemos que $B \cap B^c = \varnothing$. Por lo tanto, cualquier subconjunto de B será disjunto a B^c. Por otro lado, todo elemento x satisface que o $x \in B$ o $x \in B^c$. Luego si $A \cap B^c = \varnothing$, entonces todo elemento de A no está en B^c por lo que debe de estar en B. Por lo tanto, $A \subseteq B$.

2. En $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definimos la relación dada por

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad - bc = 0.$$

Pruebe que la relación definida es de equivalencia. Además, describa las clases de equivalencia de los pares $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 3)$, $(-1, 5)$ y $(2, 4)$.

Respuesta: Primero, dado que en $\mathbb{Z}$ tenemos la igualdad $ab = ba$, tenemos que $(a, b) \sim (a, b)$. Luego $\sim$ es reflexiva. Ahora, si $(a, b) \sim (c, d)$, entonces $ad - bc = 0$. Luego multiplicando por -1 la igualdad anterior y conmutando los productos tenemos la igualdad $cd - ad = 0$. Por lo tanto, $(c, d) \sim (a, b)$, es decir $\sim$ es simétrica. Por última, si $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$, entonces

$$ad - bc = 0 \quad \text{y} \quad cf - de = 0.$$

Multiplicando la primera igualdad por f obtenemos que $adf - bcf = 0$. Luego reemplazando el valor de cf desde la segunda ecuación tenemos que $adf - bde = 0$. Así, factorizando por d obtenemos que

$$d(af - be) = 0.$$

Por lo tanto, como $d \neq 0$, debemos tener que $af - be = 0$. Por lo tanto, $(a, b) \sim (e, f)$. Esto nos dice que $\sim$ es transitiva. Por lo tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia.
A continuación determinaremos algunas clases de equivalencia. Por definición sabemos que

$$[(a, b)]_\sim = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid ad = bc\}.$$

Estos son algunos ejemplos de clases de equivalencia

$$\begin{aligned}
[(0, 1)]_\sim &= \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid c = 0\} \\
&= \{(0, a) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}\}; \\
[(1, -1)]_\sim &= \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid d = -c\} \\
&= \{(a, -a) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}\}; \\
[(2, 3)]_\sim &= \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid 2d = 3c\}; \\
[(-1, 5)]_\sim &= \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid -d = 5c\} \\
&= \{(a, -5a) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}\}; \\
[(2, 4)]_\sim &= \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid d = 2c\} \\
&= \{(a, 2a) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus 0) \mid a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}\}.
\end{aligned}$$

2.4. Taller 4

1. Dados dos elementos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ decimos que estos son equivalentes si $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$. Demuestre que esto define una relación de equivalencia y describa sus clases de equivalencia.

   Respuesta: La relación es claramente reflexiva y simétrica. La transitividad se obtiene inmediatamente de la transitividad de la igualdad. Ahora determinaremos las clases de equivalencia. Sean $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Luego la clase de (x_0, y_0) vía esta relación de equivalencia es

   $$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + (y_0 - x_0^2)\}.$$

   En otras palabras, la clase de equivalencia de (x_0, y_0) es la parábola definida por la ecuación

   $$y = x^2 + (y_0 - x_0^2).$$

   Por ejemplo, la clase de $(0, 0)$ es la parábola definida por la ecuación $y = x^2$. La clase de $(1, 2)$ es la parábola dada por la ecuación $y = x^2 + 3$.
   Así vemos que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ puede ser escrito como la unión disjunta de parábolas de la forma $y = x^2 - a$ con $a \in \mathbb{R}$.

2. Verdadero o falso: Sean a y b enteros y n un número natural. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   a) Si $a \equiv b \pmod{n^2}$ entonces $a \equiv b \pmod{n}$.

   b) Si $a \equiv b \pmod{n}$ entonces $a \equiv b \pmod{n^2}$.

   c) Si $2a \equiv 2b \pmod{n}$ entonces $a \equiv b \pmod{n}$.

   d) Si $2a \equiv 2b \pmod{2n}$ entonces $a \equiv b \pmod{n}$.

   Respuesta:

   a) Esta afirmación es cierta. En efecto, si $a \equiv b \pmod{n^2}$ por definición de la relación de equivalencia tenemos que $a - b = n^2 k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, reescribimos la igualdad separando el cuadrado como $a - b = nnk$, notemos que como la multiplicación en los enteros es cerrada, podemos definir $l := nk \in \mathbb{Z}$, luego $a - b = nl$. Por lo tanto, $a \equiv b \pmod{n}$.

   b) Esta afirmación es falsa. Para comprobar esto tomemos $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. Notemos que $n + 1 \equiv 1 \pmod{n}$. Sin embargo, $n + 1 \not\equiv 1 \pmod{n}$ pues n^2 no divide a n. Note que cuando $n = 1$ la afirmación es trivialemente cierta.

   c) Esta afirmación es falsa si n es par. Para ver esto, supongamos que $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Luego $2k \equiv 0 \pmod{n}$. Sin embargo, $k \not\equiv 0 \pmod{n}$ pues n no divide a k. No obstante, la afirmación resulta ser cierta si n es

impar. En efecto, si n es impar y $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $2(a-b)$ es divisible por n, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$2(a-b) = nk.$$

Ahora, k no puede ser impar pues la multiplicación de números impares es impar. Por lo tanto, la ecuación anterior puede ser simplificada por 2, es decir

$$a - b = n \cdot \frac{k}{2},$$

donde $\frac{k}{2}$ es e entero. Por lo tanto, $a \equiv b \pmod{n}$.

Nota: Una pregunta interesante sería saber por qué la demostración anterior no es válida si n es par.

d) Esta afirmación es cierta. Una demostración a esto es la siguiente: si $2(a-b)$ es divisible por $2n$, entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$2(a-b) = 2nl.$$

Luego, simplificando esta ecuación por 2, tenemos que

$$a - b = nl.$$

Por lo tanto, $a \equiv b \pmod{n}$.

2.5. Taller 5

a) Dada la función $f : A \to B$, pruebe que

1) Si f es inyectiva, entonces $f(X) - f(Y) = f(X - Y)$ para cualesquiera $X, Y \subseteq A$.
2) f es inyectiva si y sólo si $f^{-1}(f(X)) = X$ para todo $X \subseteq A$.
3) f es sobreyectiva si y sólo si $f(f^{-1}(Z)) = Z$ para todo $Z \subseteq B$.

Respuesta:

1) Decir que $y \in f(X - Y)$ es por definicón que existe $x \in (X - Y)$ tal que $f(x) = y$. Ahora, como $x \in X$ y $x \notin Y$, tenemos que $f(x) \in f(X)$ y $f(x) \notin f(Y)$. Por lo tanto, decir que $y \in f(X - Y)$ es equivalente a decir que $y \in f(X) - f(Y)$. En otras palabras, $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$.
2) Recordemos que en general se tiene la contención $X \subseteq f^{-1}(f(X))$. Sea $x \in A$. Luego

$$f^{-1}(f(\{x\})) = \{y \in X \mid f(y) = f(x)\}.$$

De esta forma,

$$f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$$

si y sólo si f es inyectiva. Por lo tanto, notando que para todo $X \subseteq A$

$$f^{-1}(f(X)) = \bigcup_{x \in X} f^{-1}(f(\{x\})),$$

vemos que $f^{-1}(f(X)) = X$ si y sólo si f es inyectiva.

3) Sea $y \in B$. Recordemos que en general $f(f^{-1}(Z)) \subseteq Z$. Luego

$$f(f^{-1}(y)) \subseteq \{y\},$$

o equivalentemente,

$$f(f^{-1}(y)) = \{y\} \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(y)) = \varnothing.$$

El segundo caso ocurre si y sólo si y no es imagen de un elemento de A. Por lo tanto, notando que para todo $Z \subseteq B$

$$f(f^{-1}(B)) = \bigcup_{y \in B} f(f^{-1}(y)),$$

f es sobreyectiva si y sólo si $f(f^{-1}(B)) = B$.

b) Demuestre las siguientes proposiciones:

1) La composición de funciones inyectivas es inyectiva.
2) La composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva.
3) La composición de funciones biyectivas es biyectiva.

Respuesta: Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$.

1) Supongamos que f y g son inyectivas. Demostraremos que $g \circ f$ es inyectiva. Sean $x, y \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Luego, como g es inyectiva y $g(f(x)) = g(f(y))$, tenemos que $f(x) = f(y)$. Por lo tanto, $x = y$ pues f es inyectiva.
2) Supongamos que f y g son sobreyectivas. Demostraremos que $g \circ f$ es sobreyectiva. Sea $y \in C$. Luego como g es sobreyectiva, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Además como f es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Luego, $g(f(a)) = c$. Por lo tanto, $g \circ f$ es sobreyectiva.
3) Esto es consecuencia directa de los dos puntos anteriores.

2.6. Taller 6

Observación 2.1. *La idea es escribir funciones biyectivas para realizar los ejercicios.*

1. Sean A y B conjuntos finitos de cardinalidad n y m respectivamente. Demuestre que
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|\,.$$

Respuesta: Denotaremos $I_n = \{1, ..., n\}$ para $n \in \mathbb{N}$. Primero supondremos que A y B son disjuntos. Sabemos que existen biyecciones
$$f : I_n \to A \quad \text{y} \quad g : I_m \to B.$$
Definamos la siguiente relación
$$\begin{aligned} h = \{(x, y) \in I_{n+m} \times (A \cup B) \mid (x \leq n \ \wedge \ y = f(x)) \vee \\ (n + 1 \leq x \leq n + m \ \wedge \ y = g(i) \text{ donde } x = n + i)\}. \end{aligned}$$
Notemos que como A y B son disjuntos, entonces cada $x \in I_{n+m}$ está relacionado con un único $y \in (A \cup B)$. Por lo tanto, h es una función. Esta función es biyectiva. En efecto, sea $y \in A \cup B$. Luego o $y \in A$ o $y \in B$ (note que este "o" es excluyente pues A y B son disjuntos). Si $y \in A$, entonces existe un único $x \in I_n$ tal que $f(x) = y$. Por lo tanto, existe un único $x \in I_{n+m}$ tal que $h(x) = y$. Si $y \in B$, entonces existe un único $i \in I_m$ tal que $y = g(i)$. Luego existe un único $x \in I_{n+m}$, a saber $x = n + i$, tal que $h(x) = y$. De esta forma concluimos que
$$|A \cup B| = |I_{n+m}| = n + m = |A| + |B|.$$
Volvamos al caso general, es decir A y B no necesariamente disjuntos. Lo primero que podemos notar es que
$$A \cup B = A \cup (B - A).$$
Notemos que A y $B - A$ son disjuntos. Luego, notando que $B - A$ es finito,
$$|A \cup B| = |A| \cup |B - A|.$$
Por lo tanto, todo lo que nos faltaría probar es que $|B - A| = m - j$ donde $j = |A \cap B|$. Esto es consecuencia del siguiente hecho general:

Hecho: Si A y B son conjuntos finitos de cardinal n y m respectivamente y $B \subseteq A$, entonces $A - B$ tiene cardinal $n - m$.

Demostremos este hecho. Sea $f : I_n \to A$ una biyección. Luego $f^{-1}(B)$ está en biyección con B vía la función $f_B : f^{-1}(B) \to B$ definida por $f_B(x) = f(x)$ (Problema a.2 y a.3, Taller 5 Álgebra y Geometría). De igual forma, $f^{-1}(A-B)$ está en biyección con $A-B$. Luego, $A-B$ es finito y por lo hecho anteriormente
$$n = |A| = |B| + |A - B| = m + |A - B|.$$
■

Finalmente, $B - A = B - (A \cap B)$. Como $A \cap B \subseteq B$ obtenemos lo deseado.

2. Demuestre que la unión de dos conjuntos disjuntos y numerables es numerable.

   Respuesta: El caso finito está cubierto por lo hecho anteriormente. Sean X e Y conjuntos infinitos disjuntos y numerables. Sean $f : \mathbb{N} \to X$ y $g : \mathbb{N} \to Y$ biyecciones. Definamos la siguiente relación en $\mathbb{N} \times (X \cup Y)$

$$\begin{aligned} h = \{(n, x) \in \mathbb{N} \times (X \cup Y) \mid (n = 2k \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \ \wedge \ x = 2f(k)) \\ \vee \ (n = 2k + 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \ \wedge \ x = 2g(k) + 1)\}. \end{aligned}$$

   Vemos que esto define una función pues X e Y son disjuntos. Además, por un argumento similar al problema anterior, esta función es biyectiva.

2.7. Taller 7

1. Demuestre que para todo $n \geq 4, 2^n > n^2$.

2. Sea $a(n),\ n \in \mathbb{N}$ la proposición: $1 + 2 + \cdots n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$.

   a) Probar que si $a(k)$ es cierta para un entero k, $a(k + 1)$ también es cierta.

   b) Critique la proposición: De la inducción se sigue que $a(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

   c) Transforme $a(n)$ cambiando la igualdad por una desigualdad para que sea cierta para todo entero positivo n.

2.8. Taller 8

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

   Demuestre que $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^n$.

2. Demuestre que para todo $n \geq 12$, existen k y l números naturales o nulos, tales que $n = 4k + 5l$.

§3.
Aritmética y Combinatoria

3.1. Taller 1

1. Sea $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ el conjunto de los números primos, escritos en orden *creciente*, es decir $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ y, en general, $p_i < p_j$ si $i < j$.

a) Demuestre por inducción que $p_n > n$ para todo $n \geq 3$.

b) ¿Qué puede decir si $n = 1, 2$?

Respuesta:

a) Primero, notemos que el único primo $p \in \mathbb{N}$ par es 2. En efecto, sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo par. Luego, 2 divide a p. Como p es un número primo, sus únicos divisores en $\mathbb{N}$ son 1 y p. Dado que $2 \neq 1$, se tiene que $p = 2$. Probando así que 2 es el único primo par.

Sabemos que $p_3 = 5$ y $5 > 3$, por tanto, $p_3 > 3$ es cierto. Supongamos que para algún $n > 3$ el enunciado es cierto, es decir,

$$p_n > n. \tag{2}$$

Probemos que es cierto para $n + 1$, es decir, $p_{n+1} > n + 1$. Sumando 1 a ambos lados de (2), se sigue que

$$p_n + 1 > n + 1. \tag{3}$$

Como los primos están ordenados de manera estrictamente creciente, se tiene que $p_n > p_{n-1} > \cdots > p_3 = 5 > 2$ y, por tanto, p_n no es par. Así, se tiene que p_n es impar y, por consiguente, $p_n + 1$ es par. Ahora, como p_{n+1} es un primo mayor que p_n se tiene que también es impar, así que debe ser mayor estricto que $p_n + 1$, es decir, $p_{n+1} > p_n + 1$. Luego, lo recién mencionado y (3) implican que

$$p_{n+1} > n + 1.$$

Finalmente, por principio de inducción, se concluye que para todo $n \geq 3$ cumple que $p_n > n$.

b) Notemos que $p_1 = 2 > 1$ y $p_2 = 3 > 2$ también satisfacen la propiedad. Esto nos dice que podemos extender la propiedad a todos los naturales.

2. Demuestre por inducción (completa, si lo necesita) las siguientes afirmaciones:

a) $2^a \geq a + 1$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un primo p tal que p divide a n.

Respuesta:

a) La afirmación se verifica para 1, pues $2^1 = 2 \geq 2$. Asumamos que la afirmación es cierta para algún $a \in \mathbb{N}$ con $a > 1$, es decir, $2^a \geq a + 1$. Probemos que el enunciado se cumple para $a + 1$, es decir, $2^{a+1} \geq a + 2$. Por hipótesis de inducción se tiene que

$$2^a \geq a + 1.$$

Multiplicando por 2 ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$2^{a+1} = 2 \cdot 2^a \geq 2(a+1) = 2a + 2.$$

Como $a \geq 1$, se tiene que $a \geq 0$ y, por tanto, $2a = a + a \geq 0 + a = a$. De esta manera se tiene que $2a + 2 \geq a + 2$ y, por consiguiente,

$$2^{a+1} \geq 2a + a \geq a + 2.$$

Probando de esta manera que $2^{a+1} \geq a + 2$. Finalmente, por el principio de inducción, se concluye que $2^a \geq a + 1$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

b) Notemos que 1 no es divisible por ningún número primo. Por lo tanto, el enunciado es falso. Sin embargo, el 1 es el único elemento que no satisface la afirmación. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual a 2, existe un primo p tal que p divide a n. En efecto. Notemos que 2 es un número primo y todo número es divisible por sí mismo. Por tanto, 2 satisface la propiedad. Notemos que 3, de igual manera, satisface la propiedad por ser un número primo. También 4 satisface la propiedad pues es divisible por 2, que es un número primo.

Supongamos que para algún $n > 4$ el enunciado es cierto para todo $k \leq n$. Es decir, para todo $k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq n$, existe un primo p tal que p divide a k.

Probemos ahora que $n+1$ es divisible por algún primo. Primero, notemos que $n + 1$ no es 1 y, por tanto, es compuesto o es primo. De ser primo, se tiene que es divisible por sí mismo, satisfaciendo así la propiedad. De manera contraria, es decir si es compuesto, existen dos enteros $a, b \in \mathbb{N}$, con $a, b \geq 2$, tales que $n + 1 = a \cdot b$. Afirmamos que $a, b \leq n$. En efecto, supongamos que $b > n$. Luego, se tiene que $n + 1 = ab > an \geq 2n$. Sin embargo, esto es absurdo, pues de lo contrario se tendría que $n + 1 > 2n$, que a su vez es equivalente a $1 > n$. De esta manera se concluye que $b \leq n$. La demostración para a es análoga. Como $b \leq n$, podemos usar la hipótesis de inducción (completa) y concluir que b es divisible por algún primo p. Cómo p divide a b y, a su vez, b divide a $n + 1$, se sigue que p divide a $n+1$. Finalmente, por principio de inducción completa, se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual a 2, existe un primo p que divide a n.

3.2. Taller 2

1.
   - Si G es un grafo sin loops con 6 aristas. ¿Cuál es el mínimo número de vértices que puede tener?
   - Sea G un grafo sin loops con 26 aristas y 9 vértices. Demuestre que si hay dos vértices de valencia 3, entonces al menos uno de los vértices restantes tiene valencia mayor o igual a 7.

Respuesta:

- Sea G un grafo sin loops con n vértices. Entonces la cantidad máxima de aristas que puede tener G es $\frac{n(n-1)}{2}$. De esta forma, si $n = 4$, entonces G podría tener a los más 6 aristas. Ahora, para cualquier entero positivo k menor que 4 se tiene que $\frac{k(k-1)}{2} < 6$, es decir un grafo con 1,2 ó 3 vértices no puede tener 6 aristas. Por lo tanto, $n = 4$ es el menor entero para el cual G puede tener 6 aristas. En efecto, el grafo con 4 vértices cuyas valencias son 3 es un ejemplo (aristas y diagonales de un cuadrado).
-

2. Demuestre las siguientes identidades combinatorias.

   a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ para todo $n \geq k > 0$.

   b) $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$ para todo $n > k \geq 0$.

   c) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ para todo $n \geq k > 0$.

   d) $\binom{n}{l}\binom{n-l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l} = \binom{n}{k+l}\binom{k+l}{l}$ para todo $n, k, l \geq 0$ con $n \geq k + l$.

   Respuesta:

   a) Sea $0 < k \leq n$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} &= \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

   b) Sea $0 \leq k < n$. Por el punto anterior sabemos que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} &= \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{n-k-1} \\ &= \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}.\end{aligned}$$

   c) Sea $0 < k \leq n$. Entonces

$$\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k-1}.$$

Luego por el punto a), tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k-1} &= \binom{n+1}{k}-\binom{n}{k-1}\\ &= \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

d) Sean $n, k, l \geq 0$ con $n \geq k+l$. Luego, por el punto b), tenemos que

$$\binom{n}{l}\binom{n-l}{k} = \binom{n}{l}\frac{n-l-k+1}{n-l+1}\binom{n-l+1}{k}$$

Así, si aplicamos esto $l-1$ veces más tendremos

$$\begin{aligned}\binom{n}{l}\binom{n-l}{k} &= \binom{n}{l}\frac{(n-k)!}{(n-k-l)!}\frac{(n-l)!}{n!}\binom{n}{k}\\ &= \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!}\binom{n}{k}\\ &= \binom{n-k}{l}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Por otro lado, usando c) obtemos que

$$\binom{n}{k+l}\binom{k+l}{l} = \frac{n-k-l+1}{k+l}\binom{n}{k+l-1}\binom{k+l}{l}.$$

Haciendo esto $l-1$ vesces más, obtenemos

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+l}\binom{k+l}{l} &= \frac{(n-k)!}{(n-k-l)!}\frac{k!}{(k+l)!}\binom{n}{k}\binom{k+l}{l}\\ &= \frac{(n-k)!}{(n-k-l)!}\frac{k!}{(k+l)!}\frac{(k+l)!}{k!l!}\binom{n}{k}\\ &= \frac{(n-k)!}{(n-k-l)!l!}\binom{n}{k}\\ &= \binom{n-k}{l}\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

De esta forma, hemos probado todas las igualdades.

3.3. Taller 3

1. Quisiera repartir 15 *Kuky* y 10 *Tritón* entre 3 personas.

a) ¿De cuántas maneras puedo hacer la repartición?

b) Si cambio las 10 *Tritón* por otras 10 *Kuky*, ¿Hay más o menos formas de repartir? Justifique su respuesta.

Respuesta:

a) Primero, la cantidad de formas posibles de repartir n objetos iguales entre r personas es $\mathrm{CR}_n^r = \binom{n+r-1}{r}$. Por lo tanto, la cantidad de maneras posibles de repartir 15 Kuky y 10 Tritón entre 3 personas es

$$\mathrm{CR}_{15}^3 \mathrm{CR}_{10}^3 = \binom{17}{2}\binom{12}{2} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 11}{2^2} = 8976.$$

b) Si cambiamos las 10 Tritón por 10 Kuky, entonces habrá 25 galletas a repartir entre 3 personas, las que son

$$\mathrm{CR}_{25}^3 = \binom{27}{3} = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351$$

formas de repartir que es menor a las 8976 formas del caso anterior.

2. Considere el siguiente conjunto de tuplas:

$$\Omega = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{N}_0, \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 4 \right\}.$$

Demuestre que

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\Omega} P_4^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} = 256.$$

(Puede demostrar que hay CR_4^4 sumandos para luego calcular cada uno y finalmente sumarlos. Pero hay una forma más astuta de hacer esto.)

Respuesta: Primero recordemos que

$$P_4^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} = \frac{4!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\alpha_4!}.$$

De esto notamos que cualquier permutación de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ nos da el mismo número de arriba. Así, definamos la siguiente relación de equivalencia en Ω:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \sim (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \quad \text{si una es permutación de la otra}$$

(Compruebe que ésta es una relacion de equivalencia). Ahora, las clases de equivalencia para esta relación son las siguientes:

$$C_1 = [(1,1,1,1)]_\sim, \quad C_2 = [(0,1,1,2)]_\sim, \quad C_3 = [(0,0,1,3)]_\sim$$

$$C_4 = [(0,0,0,4)]_\sim \quad \text{y} \quad C_5 = [(0,0,2,2)]_\sim.$$

Para convencerse de esto, note que toda tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ puede ser permutada de tal forma que sus coordenadas estén ordenadas de forma creciente. Ahora la cantidad de elementos en cada clase es al siguiente

$$|C_1| = P_4^4 = 1, \quad |C_2| = P_4^{1,2,1} = 12, \quad |C_3| = P_4^{2,1,1} = 12$$

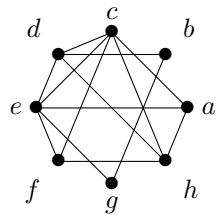
$$|C_4| = P_4^{3,1} = 4 \quad \text{y} \quad |C_5| = P_4^{2,2} = 6.$$

De esta forma, recordando que Ω es la unión disjunta de las clases C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5, tenemos que la suma que queríamos calcular queda

$$\begin{aligned}
\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\Omega} P_4^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} &= |C_1|P_4^{1,1,1,1} + |C_2|P_4^{0,1,1,2} + |C_3|P_4^{0,0,1,3} + |C_4|P_4^{0,0,0,4} + |C_5|P_4^{0,0,2,2} \\
&= 4! + 12 \cdot 12 + 12 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 6 \\
&= 24 + 144 + 48 + 4 + 36 \\
&= 256.
\end{aligned}$$

3.4. Taller 4

1. Sea G el siguiente grafo:



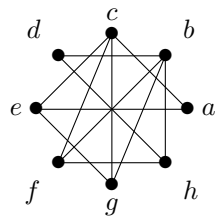
   a) ¿Cuantos vértices y aristas posee G?

   b) ¿Cual es la valencia de cada vértice de G?

   c) ¿Posee G un ciclo euleriano?

   d) ¿Es G planar? Si no es planar indique por qué, y si es planar muestre una representación planar del grafo.

   Responda a las mismas preguntas para este otro grafo:



Respuesta:

a) Denotemos por $G_i = (V_i, A_i)$ a cada uno de los grafos. El primer grafo G_1 tiene $|V_2| = 8$ vértices. Para calcular el número de aristas recurriremos al Lema del Apretón de Manos, es decir,

$$\sum_{v \in V_1} \mathrm{val}(v) = 2|A_1|.$$

Para ello necesitaremos saber la valencia de cada uno de los vértices:

1) $\mathrm{val}(a) = 3$
2) $\mathrm{val}(b) = 2$
3) $\mathrm{val}(c) = 5$
4) $\mathrm{val}(d) = 4$
5) $\mathrm{val}(e) = 5$
6) $\mathrm{val}(f) = 3$
7) $\mathrm{val}(g) = 2$
8) $\mathrm{val}(h) = 4$

Esto responde la parte *b*) del problema para el grafo G_1. De esta manera, se sigue que

$$3 + 2 + 5 + 4 + 5 + 3 + 2 + 4 = 2|A_1|$$

y, por tanto, $|A_1| = 14$.

El segundo grafo tiene $|V_2| = 8$ vértices, al igual quel primero. La estrategia para calcular el número de vértices será la misma, por tanto debemos saber las valencias de sus vértices:

1) $\mathrm{val}(a) = 2$
2) $\mathrm{val}(b) = 4$
3) $\mathrm{val}(c) = 4$
4) $\mathrm{val}(d) = 2$
5) $\mathrm{val}(e) = 3$
6) $\mathrm{val}(f) = 3$
7) $\mathrm{val}(g) = 3$
8) $\mathrm{val}(h) = 3$

Esto responde la parte *b*) del problema para el grafo G_2. De esta manera, se sigue que

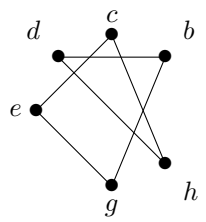
$$2 + 4 + 4 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 2|A_2|$$

y, por tanto, $|A_2| = 12$. Con esto se concluyen tanto la parte *a*) como la *b*) para ambos grafos.

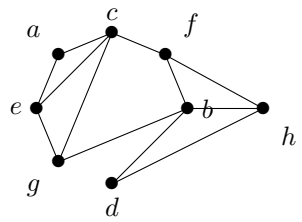
b) Esto fue respondido en la parte *a*).

c) Debido a que ambos grafos son conexos tienen vértices con valencia impar, por el Teorema 1.4.10 del Apunte de Aritmética y Combinatoria, se tiene que ninguno de los grafos posee un ciclo euleriano.

d) Notemos que ninguno de los grafos tiene más de 4 vértices con valencia mayor o igual a 4, por tanto, ninguno de los grafos contiene a K_5. Para concluir, usaremos el Teorema de Kuratowski y para ello nos bastará ver si contienen a K_3 o no. El primer grafo no es planar pues contiene a K_3



El grafo G_2 es planar y tiene la siguiente prensentanción planar:



2. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   - Todo árbol es planar.
   - Todo grafo con 7 o menos ciclos es planar.

3.5. Taller 5

1. Pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

   - $3n(n+1)$ es divisible por 6.
   - $n^5 - n$ es divisible por 30.
   - $4^n - 1$ es divisible por 3.

2. Cuántas soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tienen las siguientes ecuaciones?

   a) $15x + 6y = 2$.

   b) $12x + 7y = 1$.

Respuesta:

1. En los siguientes procederemos por inducción.

   ▪

2. *a*) Supongamos que la ecuación tiene solución. Entonces, existen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tales que $15x_0 + 6y_0 = 2$. De esta manera, se tiene que $3(5x_0 + 2y_0) = 2$, con $5x_0 + 2y_0 \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, esto es absurdo. Si esto fuese cierto se tendría que 3 es un divisor de 2 y como 2 es primo, $3 \neq 1$ y $3 \neq 2$. Contradicción. Concluimos que la ecuación no tiene solución.

   b) Por inspección notamos que $x = 3$ e $y = -5$ es una solución, pues

$$12 \cdot 3 + 7(-5) = 36 - 35 = 1.$$

   Supongamos que $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ es otra solución. Entonces,

$$12x_0 + 7y_0 = 1.$$

   Consideremos la siguiente igualdad

$$12x_0 + 7y_0 = 1 = 12 \cdot 3 + 7(-5),$$

   es decir,

$$12x_0 + 7y_0 = 12 \cdot 3 + 7(-5).$$

   Agrupando obtenemos la siguiente igualdad

$$12(x_0 - 3) = 7(-5 - y_0).$$

   Esto nos dice que 7 divide $12(x_0 - 3)$. Dado que 7 es primo, podemos usar el Lema de Euclides y concluir que 7 divide a 12 o 7 divide a $(x_0 - 3)$. Como 7 no divide a 12, se tiene que 7 divide a $(x_0 - 3)$. Es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0 - 3 = 7k$. De manera equivalente, $x_0 = 3 + 7k$.

   De manera análoga, el Corolario 2.2.2 nos permite concluir que 12 divide a $(-5 - y_0)$, es decir, existe $k' \in \mathbb{Z}$ tal que $-5 - y_0 = 12k'$. De manera equivalente, $y_0 = -5 - 12k'$. Como x_0, y_0 es una solución, se tiene que $12x_0 + 7y_0 = 1$. Entonces

$$12(3 + 7k) + 7(-5 - 12k') = 1$$

   y, por tanto,

$$12 \cdot 3 + 7(-5) + 12\dot{7}\dot{k} - 7 \cdot 12 \cdot k' = 1.$$

   La parte izquierda de la suma es 1. Luego,

$$1 + 12\dot{7}\dot{k} - 7 \cdot 12 \cdot k' = 1$$

   y, por tanto, $12 \cdot 7 \cdot k = 7 \cdot 12 \cdot k'$. Esto último implica que $k = k'$. Entonces, $(x_0, y_0) = (3 + 7k, -5 - 12k)$ son soluciones para todo $k \in \mathbb{Z}$.

3.6. Taller 6

1. Compruebe si existen soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$ a las ecuaciones

   a) $93x - 81y = 3$;

   b) $231x + 491y = 1$;

   c) $627x + 525y = 7$;

   Si existen tales soluciones, encuéntrelas **todas** usando los algoritmos vistos en clases.

   Respuesta:

   a) Notemos que $(93, 81) = 3$, pues 81 es una potencia de 3 y 9 no divide a 93. Luego, por la Identidad de Bézout, la ecuación tiene soluciones enteras, pues 3 divide a 3. Para determinar una solución de la ecuación usaremos el Algoritmo de la división de Euclides.

$$93 = 81 \cdot 1 + 12, \tag{4}$$
$$81 = 12 \cdot 6 + 9, \tag{5}$$
$$12 = 9 \cdot 1 + 3, \tag{6}$$
$$9 = 3 \cdot 3. \tag{7}$$

   Luego, reemplazando (5) en (6) se tiene la relación

$$12 = (81 - 12 \cdot 6) \cdot 1 + 3 = 81 - 12 \cdot 6 + 3,$$

   que es equivalente a,

$$12 \cdot 7 = 81 + 3.$$

   Reemplazando (4) en lo anterior se tiene

$$(93 - 81) \cdot 7 = 12 \cdot 7 = 81 + 3,$$

   que es equivalente a

$$93 \cdot 7 - 81 \cdot 8 = 3.$$

   Obteniendo así, que $(7, 8)$ es una solución a la ecuación. Supongamos ahora que $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ es otra solución de la ecuación, entonces

$$93 \cdot 7 - 81 \cdot 8 = 3 = 93x_0 - 81y_0.$$

   De esta manera se tiene la relación

$$93(7 - x_0) = 81(8 - y_0).$$

Simplicando por 3 se sigue que

$$31(7 - x_0) = 9(8 - y_0).$$

Por una parte, esto nos dice que 31 divide a $9(8 - y_0)$. Como 31 es primo, por Lema de Euclides, se tiene que 31 divide a 9 ó a $(8 - y_0)$. Luego, como $9 < 31$, se tiene que 31 divide a $(8 - y_0)$ y, por tanto, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $y_0 = 8 - 31k$. Por otra parte, 9 divide a $31(7 - x_0)$. Dado que 9 no es un número primo, no es posible usar el Lema de Euclides. Sin embargo, probaremos el siguiente lema que nos ayudará en esta aventura.

Lema 3.1. *Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a|bc$ y $(a, b) = 1$, entonces $a|c$.*

Demostración. Primero probaremos la afirmación a para $a \in \mathbb{N}$ y luego extenderemos a todo entero. Procederemos por inducción completa sobre a. Notemos que 1 se cumple, pues 1 divide a todos los naturales y es coprimos con todos. Ahora, consideremos $a = 2$. Por el Lema de Euclides, 2 divide a b o c, pero como $(2, b) = 1$, se tiene que 2 divide a c.

Supongamos que para algún $a \in \mathbb{N}$, con $a \geq 2$, se tiene que para todo $k \geq a$ se cumple la propiedad.

Sean $b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $(a + 1)|bc$ y $(a + 1, b) = 1$. Si $(a + 1)$ es un número primo, la conclusión se tiene por Lema de Euclides. Supongamos que $(a+1)$ no es primo. Por el Problema $2b$ del Taller 1, existe un número primo p que divide a $(a + 1)$. Es decir, existe $k \in \mathbb{N}$, con $k < (a + 1)$, tal que $a + 1 = pk$. Como $p > 2$, se tiene que $k \leq a$. Notemos que, como $p|(a + 1)$ se tiene que $(b, p) = 1$ y $p|bc$, entonces $p|c$. Además, dado que $(a+1)|bc$, existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $(a+1)l = bc$. Luego, $pkl = bc$ y, por tanto, $kl = bc'$, con $c = pc'$. También, como $k|(a + 1)$, se tiene que $(b, k) = 1$. Entonces, $k|bc'$ y $(k, b) = 1$. Dado que $k \leq a$, por hipótesis de inducción, se tiene que $k|c'$, es decir, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $kr = c'$. Así, se tiene que $c = pc' = pkr = (a + 1)r$. Es decir, $(a + 1)|c$.

Finalmente, por Principio de Inducción completa, se cocluye que, para $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si $a|bc$ y $(a, b) = 1$, entonces $a|c$.[2]

□

De esta manera, por el lema anterior, podemos concluir que 9 divide a $(7 - x_0)$, y por tanto, $x_0 = 7 - 9k'$. De esta manera, si (x_0, y_0) es una solución es de la forma $(7 - 9k', 8 - 31k)$, con $k, k' \in \mathbb{Z}$. Veamos para que valores de k y k' son soluciones, es decir, $93(7 - 9k') - 81(8 - 31k) = 3$. Esto ocurre sí y sólo si

$$\begin{aligned} 3 = 93(7 - 9k') - 81(8 - 31k) &= 93(7) - 93(9)k' - 81(8) + 81(31)k \\ &= 3 - 93(7)k' + 81(31)k, \end{aligned}$$

[2]la extensión para $a \in \mathbb{Z}$ se deja como ejercicio.

es decir, si y sólo si $0 = -93(7)k' + 81(31)k$. Esto, a su vez, es equivalente a $k' = k$. Esto implica que las soluciones son de la forma $(7 - 9k, 8 - 31k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

b) El número 491 es un número primo. Dado que $491 > 231$, se tiene que no lo divide y, por tanto, $(231, 491) = 1$. Luego, por la Identidad de Bézout, la ecuación tiene soluciones enteras. Para encontrar unas de las soluciones usaremos el Algoritmo de la división de Euclides.

$$491 = 231 \cdot 2 + 29, \tag{8}$$
$$231 = 29 \cdot 7 + 28, \tag{9}$$
$$29 = 28 \cdot 1 + 1, \tag{10}$$
$$28 = 1 \cdot 28. \tag{11}$$

Luego, reemplazando (9) en (10) se tiene la relación

$$29 = (231 - 29 \cdot 7)1 + 1 = 231 - 29 \cdot 7 + 1,$$

que es equivalente a

$$29 \cdot 8 = 231 + 1.$$

Reemplazando (8) en lo anterior se tiene

$$(491 - 231 \cdot 2)8 = 29 \cdot 8 = 231 + 1,$$

que es equivalente a

$$491 \cdot 8 - 231 \cdot 17 = 1.$$

Obteniendo así, que $(-17, 8)$ es una solución a la ecuación. Supongamos ahora que $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ es otra solución de la ecuación, entonces

$$231 \cdot (-17) + 491 \cdot 8 = 1 = 231x_0 + 491y_0.$$

De esta manera se tiene la relación

$$231(-17 - x_0) = 491(y_0 - 8).$$

Como $(231, 491) = 1$, por el Lema 3.1, se sigue que 491 divide a $-17 - x_0$ y 231 divide a $y_0 - 8$. Luego, existen $k, k' \in \mathbb{Z}$ tales que $x_0 = -17 - 491k$ y $y_0 = 8 + 231k'$. Así, si (x_0, y_0) es una solución de la ecuación debe ser de la forma $(-17 - 491k, 8 + 231k')$, con $k, k' \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos si k, k' deben satisfacer alguna relación para ser solución. Suponiendo que son solución se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= 231(-17 - 491k) + 491(8 + 231k) \\ &= 231(-17) + 231(491)k' + 491(8) + 491(231)k \\ &= 1 - 231(491)k' + 491(231)k, \end{aligned}$$

es decir, son solución si $0 = -93(7)k' + 81(31)k$. Esto ocurre sólo si $k' = k$. De esta manera, las soluciones son de la forma $(-17-491k, 8+231k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

c) Los factores primos de 525 son 7, 5 y 3 mientras que los de 627 son 3, 11 y 19. De esta manera, sabemos que $(627, 525) = 3$ y, por la Identidad de Bézout, sabemos que la ecuación no tiene solución.

2. Determine si existen soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$ a las ecuaciones

   a) $6x + 10y + 15z = 1$;

   b) $42x + 30y + 27z = 3$.

   Pregunta bonus para entretenerse: Encuentre **todas** las soluciones.

   Respuesta:

   a) La ecuación la podemos escribir como $6x+5(2y+3z) = 1$. Si reemplazamos la parte $2y+3z$ de la ecuación por una incógnita w obtenemos la ecuación

   $$6x + 5w = 1.$$

   Esta ecuación sabemos que tiene solución por la Identidad de Bézout, ya que 5 y 6 son coprimos. Ahora supongamos que $x_0, w_0 \in \mathbb{Z}$ son una solución. Ahora, tenemos la ecuación $2y + 3z = w_0$. Nuevamente, por la Identidad de Bézout, sabemos que esta ecuación tiene solución. Entonces, existen $y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$ tales que $2y_0 + 3z_0 = w_0$. De esta manera, x_0, y_0, z_0 es una solución de la ecuación, pues

   $$6x_0 + 10y_0 + 15z_0 = 6x_0 + 5w_0 = 1.$$

   Por ejemplo, una solución es $(1, 1, -1)$.

   Toda solución de la ecuación principal genera una solución a la ecuación $6x + 5w = 1$. Las soluciones de esta última son todas la de la forma $(1 - 5k, -1 + 6k)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Así, para un k fijo, tenemos la ecuación $2y + 3z = -1 + 6k$. Una solución para esta ecuación es $(1 + 3k, -1 - 2k)$. Todas las soluciones de esta ecuación son de la forma $(1 + 3k + 3l, -1 - 2k - l)$, para $l \in \mathbb{Z}$. Así, tenemos que un conjunto solución para la ecuación principal es $\{(1 - 5k, 1 + 3(l + k), -1 - 2(l + k)) \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$. Este es, de hecho, el conjunto solución.

   b) Al igual que en la parte anterior, podemos reescribir la ecuación como

   $$42x + 3w = 3,$$

   con $w = 10y + 9z$. Dado que $(42, 3) = 3$, por la Identidad de Bézout, la ecuación $42x + 3w = 3$ tiene soluciones enteras. Sea $x_0, w_0 \in \mathbb{Z}$ una solución. Ahora, tenemos la siguiente ecuación $10y + 9z = w_0$. Nuevamente,

por la Identidad de Bézout, esta ecuación tiene soluciones enteras, pues 10 y 9 son coprimos. Sean $y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$ una solución para la ecuación, entonces $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$ son una solución para la ecuación principal. En efecto,

$$42x_0 + 30y_0 + 27z_0 = 42x_0 + 3w_0 = 3.$$

3.7. Taller 7

1. Sea A un conjunto y sea R una relación de orden en A.
   - Demuestre que el conjunto A tiene a los más un elemento mínimo.
   - Demuestre que si A tiene un mínimo a, entonces a es también un elemento minimal.
   - Demuestre además que en ese caso no existe otro elemento minimal en A.
2. Considere el conjunto $\mathbb{N}$ con la relación de orden $|$ dada por la divisibilidad.
   - Demuestre que $1 \in \mathbb{N}$ es un mínimo para esta relación.
   - Demuestre que el subconjunto $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ no posee un mínimo.
   - Demuestre que los elementos minimales de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ son los números primos.

3.8. Taller 8

1. Para cada n entre 2 y 9:
   - Decida si $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ es un grupo. Justifique su respuesta.
   - Si efectivamente se trata de un grupo, calcule el orden de la clase $[17]_n$.
2. Encuentre **todas** las clases de orden (aditivo) a en $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ en los siguientes casos:
   - $a = 2$ y $n = 6$;
   - $a = 2$ y $n = 7$;
   - $a = 3$ y $n = 12$;
   - $a = 5$ y $n = 60$;
   - $a = 12$ y $n = 12$;