

## Problemas

### Taller

#### Cálculo I

1. Decida si los siguientes límites existen en cuyo caso calculelos.

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x^2)$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x^2)$ .

2. Sea  $\alpha$  un número real y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

- a) Demuestre que para todo  $\alpha$  la función  $f$  tiene límites laterales en 1. Calcúlelos.
- b) Encuentre el o los valores de  $\alpha$  de modo que la función  $f$  sea continua en 1.

### Álgebra y Geometría I

1. Demuestre que para todo  $n \geq 4$ ,  $2^n > n^2$ .

2. Sea  $a(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  la proposición:  $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$ .

- a) Probar que si  $a(k)$  es cierta para un entero  $k$ ,  $a(k + 1)$  también es cierta.
- b) Critique la proposición: De la inducción se sigue que  $a(n)$  es cierta para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- c) Transforme  $a(n)$  cambiando la igualdad por una desigualdad para que sea cierta para todo entero positivo  $n$ .

### Aritmética y Combinatoria

1. Sea  $A$  un conjunto y sea  $R$  una relación de orden en  $A$ .

- Demuestre que el conjunto  $A$  tiene a los más un elemento mínimo.
- Demuestre que si  $A$  tiene un mínimo  $a$ , entonces  $a$  es también un elemento minimal.

- Demuestre además que en ese caso no existe otro elemento minimal en  $A$ .
2. Considere el conjunto  $\mathbb{N}$  con la relación de orden  $|$  dada por la divisibilidad.
- Demuestre que  $1 \in \mathbb{N}$  es un mínimo para esta relación.
  - Demuestre que el subconjunto  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$  no posee un mínimo.
  - Demuestre que los elementos minimales de  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$  son los números primos.