

Problemas

Taller

Cálculo I

Definición 0.1 Dada una función $f : A \rightarrow A$, denotamos por $f^{(n)}$ la composición de f consigo misma n veces. Así, por ejemplo, $f^{(2)} = f \circ f$.

1. Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- a) Grafique ambas funciones
b) Describa las fórmulas de $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ para $n = 2, 3, 4$. Al hacer esto, qué diferencias nota entre los casos de f y g . ¿Cuál cree usted que es la explicación? Elabore.
2. a) Sea $a > 1$ y $k \in \mathbb{N}$. Muestre que la sucesión $s_n = \frac{n^k}{a^n}$ es convergente y calcule su límite.
b) Demuestre que la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

es convergente y converge a un número comprendido entre $1/2$ y 1 .

Álgebra y Geometría I

Observación 0.2 La idea es escribir funciones biyectivas para realizar los ejercicios.

1. Sean A y B conjuntos finitos de cardinalidad n y m respectivamente. Demuestre que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

2. Demuestre que la unión de dos conjuntos disjuntos y numerables es numerable.

Aritmética y Combinatoria

1. Compruebe si existen soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$ a las ecuaciones

a) $93x - 81y = 3$;

b) $231x + 491y = 1$;

c) $627x + 525y = 7$;

Si existen tales soluciones, encuéntrelas **todas** usando los algoritmos vistos en clases.

2. Determine si existen soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$ a las ecuaciones

a) $6x + 10y + 15z = 1$;

b) $42x + 30y + 27z = 3$.

Pregunta bonus para entretenerse: Encuentre **todas** las soluciones.