

Aritmética y Combinatoria

Ayudantías 27 y 28 de Junio 2023

Profesor de Cátedra: Giancarlo Lucchini
Ayudante: Javier Pavez

1. Muestre que 2 es divisible por $(1+i)^2$ en $\mathbb{Z}[i]$.
2. Encuentre si es que existen $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ tales que sean coprimos pero sus normas sean iguales.
3. ¿Existen elementos en $a+bi, c+di \in \mathbb{R}[i] - \mathbb{Q}[i]$ con b o d no cero tal que $(a+bi)(c+di) \in \mathbb{Z}[i]$?
4. Calcule un $\text{mcd}(5+2i, 3+i)$.
5. Calcule un $\text{mcd}(5+2i, 3+i)$ y escríbalo como combinación lineal de $5+2i$ y $3+i$.
6. Calcule $\text{mcd}(-1+5i, -3+i)$.
7. Calcule $\text{mcd}(49+7i, -2+89i)$.
8. Para $x, w \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ y d un $\text{mcd}(x, w)$, demuestre que cualquier otro máximo común divisor d' es un múltiplo de d por alguna de las unidades de $\mathbb{Z}[i]$.
9. Escriba todos los máximos común divisores de $49+7i$ y $-2+89i$ como combinación lineal de $49+7i$ y $-2+89i$.
10. Demostrar si un entero Gaussiano tiene norma par entonces es múltiplo de $i+1$.
11. Sean $z, w \in \mathbb{Z}[i]$. Demostrar que si $z|w$, entonces $N(z)|N(w)$.
12. Sea $x \in \mathbb{Z}[i]$. Demuestre que si $N(x)$ es primo en $\mathbb{Z}$, entonces x es primo en $\mathbb{Z}[i]$.
13. Demuestre que si $a | bc$ en $\mathbb{Z}[i]$ con a y b relativamente primos entonces $a | c$.
14. Demuestre que si $a | c$ y $b | c$ en $\mathbb{Z}[i]$ con a y b relativamente primos entonces $ab | c$.
15. Determinar la descomposición en primos de Gauss de 325.
Hint: $13 \cdot 25$.
16. Determinar la descomposición en primos de Gauss de 6171.
Hint: $363 \cdot 17$.
17. Determinar la descomposición en primos de Gauss positivos de $7+5i$.