

Problemas para el Control 5

1. ¿Es 22 un cuadrado en $\mathbb{Z}/841\mathbb{Z}$? Justifique.
2. Encuentre **todos** los $x \in \mathbb{Z}$ tales que
$$x^{13} + 13x^7 \equiv 0 \pmod{14}.$$
3. Encuentre **todos** los $x \in \mathbb{Z}$ tales que
$$x^{18} + 1 \equiv 0 \pmod{17}.$$
4. Determine si $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ es cíclico y, en caso de serlo, encuentre un generador.
5. Determine si $(\mathbb{Z}/74\mathbb{Z})^*$ es cíclico y, en caso de serlo, encuentre un generador.
6. Encuentre tres elementos de orden 2 en $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z})^*$. Concluya a partir de esto que $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z})^*$ no es cíclico.
7. Encuentre una biyección f entre $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ y $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tal que $f(ab) = f(a) + f(b)$ para todo $a, b \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$. Expresé explícitamente $f([2]_7)$ y $f([5]_7)$.
8. Encuentre todos los triples pitagóricos (x, y, z) tales que x, y, z estén en progresión aritmética de diferencia d para algún $d \in \mathbb{Z}$.
9. Encuentre todos los triples pitagóricos (x, y, z) tales que x, y, z estén en progresión geométrica de razón r para algún $r \in \mathbb{Q}$.
10. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Determine **todas** las soluciones enteras de $x^3 + p^2y^3 = pz^3$.
11. Determine **todas** las soluciones enteras de $3x^2 + 17y^2 = z^2$.
12. ¿Se puede expresar 4,410,000,000 como suma de cuadrados? Justifique.
13. ¿Se puede expresar 2023 como suma de dos cuadrados? Justifique.
14. Multiplique $41 + 9i$ por $12 + 8i$.
15. Calcule $(4 + 2i)^3 \cdot (1 + i^{101})^2 + (176 - 32i)$.