

Aritmética y Combinatoria

Ayudantía 6 de Junio 2023

Profesor de Cátedra: Giancarlo Lucchini
Ayudante: Javier Pavez

1. Determine todas las soluciones de $x^4 - 14x^3 + 781x^2 - 133x + 289 \equiv 0 \pmod{426888}$
(*Hint*: $426888 = 72 \cdot 77^2$)

2. **Objetivo:** Demostrar que

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ primo}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

a) Demostrar que si $\text{mcd}(m, n) = 1$ entonces $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

b) Demostrar que si p es primo e $i \in \mathbb{N}$ entonces $\varphi(p^i) = p^{i-1}(p - 1)$

c) Utilizar a), b) y Teorema Fundamental de la Aritmética para cumplir el objetivo.

3. Calcular $\#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ para $n \in \{30, 48, 1001\}$.

4. Demostrar que $\#\varphi(n)$ es par $\forall n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > 2$.

5. Encontrar todos los elementos de orden 2 de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$.

6. Encontrar todos los elementos de orden 2 de $(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z})^*$.

7. Encontrar **todas** las soluciones enteras de

$$x^{21} + 10x^{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

8. Demuestre que un grupo cíclico de orden n contiene un conjunto de m elementos que es a su vez un grupo cíclico para todo m que divide a n