Aritmética y Combinatoria
Prof. Giancarlo Lucchini
Ay. Javier Pavez, Sebastián Rosselot

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias c/m Matemáticas

Problemas para el Control 4

1. Demuestre que para que un numero $n \in \mathbb{N}$ sea divisible por 8 el numero formado por la suma del cuádruple de las centenas, el doble de las decenas y las unidades de n debe ser divisible por 8.

2. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$ es compuesto y $n > 4$, entonces $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$

3. Para $[a], [b] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con $b > 0$ y p primo, definamos $[a]^{[b]} = [a^b]$. ¿Es una operación bien definida? Justifique.

4. Determine si $(\mathbb{R}, \cdot)$ es un grupo. Justifique.

5. Demuestre que $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \left\{\overline{0}\right\}, \cdot\right)$ es un grupo si y solo si n es un primo.

6. Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (justificando en cada caso). El par $(n\mathbb{Z}, +)$ es un grupo para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

7. Sea $a \in \mathbb{Z}$ y $\overline{a}$ la clase correspondiente en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sea m el orden aditivo de $\overline{a}$ y $l \in \mathbb{Z}$ tal que $la \equiv 0 \pmod{n}$. Demuestre que m divide a l.

8. Encuentre **todos** los $x \in \mathbb{Z}$ tales que $36x \equiv 366 \pmod{210}$.

9. Encuentre **todos** los $x \in \mathbb{Z}$ tales que $5x \equiv 3 \pmod{25}$.

10. Encuentre **todos** los $x \in \mathbb{Z}$ tales que $7854x \equiv 990 \pmod{1254}$.

11. Encuentre **todos** los $x \in \mathbb{Z}$ tales que
$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 2 \pmod{7}.$$

12. Encuentre **todos** los $x \in \mathbb{Z}$ tales que
$$3x \equiv 6 \pmod{12}, \quad 2x \equiv 5 \pmod{7}, \quad 3x \equiv 1 \pmod{5}.$$

13. Encuentre **todos** los $x \in \mathbb{Z}$ tales que
$$7x \equiv 3 \pmod{12}, \quad 10x \equiv 6 \pmod{14}.$$

14. Demuestre que $x \in \mathbb{Z}$ es solución del sistema
$$x \equiv 3 \pmod{4}, \quad x \equiv 15 \pmod{56}, \quad x \equiv 13 \pmod{30},$$
si y solo si también es solución del sistema
$$x \equiv 1 \pmod{14}, \quad x \equiv 7 \pmod{24}, \quad x \equiv 13 \pmod{15}.$$

15. Demuestre que, si $x \in \mathbb{Z}$ es solución del sistema
$$x \equiv 11 \pmod{14}, \quad x \equiv 21 \pmod{40}, \quad x \equiv 19 \pmod{33},$$
entonces también es solución del sistema
$$x \equiv 1 \pmod{4}, \quad x \equiv 1 \pmod{12}, \quad x \equiv 41 \pmod{55}.$$