

## Problemas para el Control 1

1. Digamos que  $U$  es el conjunto de todos los seres humanos, vivos o muertos, y  $P(x, y)$  significa “ $x$  es padre de  $y$ ”. Escriba con palabras la proposición

$$\exists x \in U, \forall y \in U, P(x, y),$$

e indique si es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

2. Usando las notaciones del ejercicio anterior, escriba con palabras la proposición

$$\forall x \in U, \exists y \in U, P(x, y),$$

e indique si es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

3. Considere la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida recursivamente por  $a_0 := 1$ ,  $a_1 := 2$  y

$$a_n := 2a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Demuestre que  $a_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

4. Sea  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida recursivamente por  $b_1 := 1$  y

$$b_n := \sqrt{2 + b_{n-1}}, \quad \forall n \geq 2.$$

Demuestre que  $b_n < 2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

5. Sea  $F_n$  el  $n$ -ésimo número de Fibonacci. Demuestre que  $\forall n \in \mathbb{N}$  se cumple

$$F_{n+4} = F_3 F_{n+1} + F_2 F_n.$$

6. Demuestre que para todo  $n \geq k \geq 1$  se tienen las igualdades

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad \text{y} \quad \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-2k}{n} \binom{n}{k}.$$

7. En una mesa redonda hay 25 hombres y 25 mujeres. Demuestre que siempre es posible encontrar una persona cuyos dos vecinos sean mujeres.
8. Un grupo de  $k$  amigos decide juntarse y todos llegan en distintos momentos y por separado. Asumiendo que cada persona saludó a todos una sola vez, ¿cuántos saludos ocurrieron en el lugar de encuentro?
9. En un tablero de ajedrez (de 8 casillas por 8 casillas), ¿de cuántas formas podemos colocar 8 torres (todas iguales) sin que se ataquen entre ellas? Recuerde que las torres pueden atacar todas las casillas vertical y horizontalmente de donde están ubicadas.
10. Queremos dividir un grupo de  $2n$  personas en  $n$  parejas ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?
11. Sea  $G$  un grafo sin loops con al menos dos vértices. Demuestre que al menos dos vértices de  $G$  tienen la misma valencia.
12. Diremos que un grafo es  $r$ -regular si  $\text{val}(v) = r$ ,  $\forall v \in V$ . Demuestre que si  $r$  es impar, entonces todo grafo finito  $r$ -regular tiene un número par de vértices.
13. Si  $G$  es un grafo sin loops con 28 aristas, ¿cual es el mínimo número de vértices que puede tener?
14. Sea  $G$  un grafo sin loops con 26 aristas y 9 vértices. Demuestre que si hay tres vértices de valencia 3, entonces al menos uno de los vértices restantes tiene valencia 8.
15. Sea  $G$  un grafo sin loops con 12 aristas. Si hay 6 vértices de valencia 3 y el resto tiene valencia estrictamente menor que 3. Determine el número mínimo de vértices que puede tener  $G$ .