Aritmética y Combinatoria
Ayudantía 21 de Marzo 2023

Profesor de Cátedra: Giancarlo Lucchini
Ayudantes: Javier Pavez y Sebastián Rosselot

1. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que 14 divide a $2^{3n+1} - 2$.
4. Demostrar por inducción que $n(n+1)$ es par, $\forall n \in \mathbb{N}$.
5. Sea $n \in \mathbb{N}$, consideraremos la proposición $a(n)$ como $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$.
   a) Demostrar que si $a(k)$ es verdad, entonces $a(k+1)$ tambien es verdad.
   b) ¿Podemos utilizar inducción para decir que $a(n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$?
6. Consideremos la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \forall n \geqslant 3 \end{cases}$$

   Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumplen:
   a) $F_n < 2^n$
   b) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
   c) $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$