Universidad de Chile

Facultad de Ciencias

Análisis real | CONTROL 3

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

INSTRUCCIÓN: Responda la pregunta 3, y elija otra a su gusto entre las preguntas 1 y 2.

1. Decida si los siguientes espacios métricos son conexos. En cualquier caso, justifique. **3 puntos**

   a) El espacio $X = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} ... \cup \{2023\} = \bigcup_{i=1}^{2023}\{i\}$, dotado con la métrica discreta. **1 punto**

   Solución: No es conexo.
   Como todo conjunto es abierto en un espacio métrico discreto, bastaba tomar $A = \{1\}$ y $B = \bigcup_{i=2}^{2023}\{i\}$ como una escisión no trivial de X.

   b) El espacio $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c \times \mathbb{R}$, donde cada factor del producto tiene su métrica usual. **0.5 puntos**

   Solución: Se vio en clases que un producto de espacios es conexo, si y solo si, cada factor lo es. En este caso, sabemos que $\mathbb{Q}$ no es conexo si lo dotamos con el valor absoluto, pues

   $$\mathbb{Q} = [(-\infty, \pi) \cap \mathbb{Q}] \cup [(\pi, \infty) \cap \mathbb{Q}]$$

   es una escisión no trivial. Por lo tanto, X no es conexo.

   c) El conjunto $L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{n}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, visto como subespacio de $\mathbb{R}^2$ dotado con la métrica euclideana. **0.5 puntos**

   Solución: Es conexo. En efecto, L_n es unión de conexos con un punto en común ($(0, \frac{1}{n})$). Hay muchas formas de justificar la conexidad de ambos conjuntos. Tanto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{n}\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, se pueden ver como imagen de $\mathbb{R}$ vía una función continua. En el caso de A, la función continua puede ser $\phi(t) = (t, \frac{1}{n})$, con $t \in \mathbb{R}$, y en el caso de B, $\xi(t) = (0, t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Otra forma, era notar que A y B se pueden escribir como producto finito de espacios conexos: $A = \mathbb{R} \times \{\frac{1}{n}\}$ y $B = \{0\} \times \mathbb{R}$.

   d) El conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ visto como subespacio de $\mathbb{R}^2$ dotado con la métrica euclideana, donde L_n es definido como en c). **1 punto**

   Solución: Por la parte anterior, cada L_n es conexo, y además, comparten al punto $(0, 0)$. Por lo tanto, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ también es conexo.

2. Verdadero o falso:

   a) Sea $(E, || \cdot ||)$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial normado. Todo subconjunto convexo es conexo. **0.5 puntos**

   Solución: Verdadero. Por definición de convexidad de $A \subset E$, cada par de elementos de A, se pueden conectar por la recta $\{at + (1 - t)b : t \in [0, 1]\} \subset A$. De esta forma, se cumple la conexidad por caminos.

b) La imagen inversa de un conexo vía una función continua no es necesariamente conexo. **0.5 puntos**

Solución: Falso. Por ejemplo, la función $f : (\mathbb{Q}, |\cdot|) \longrightarrow (\{0\}, d_{01})$ dada por $f(q) = 0$, para $q \in \mathbb{Q}$. Vemos que f es continua por ser constante, y $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Q}$ muestra que la imagen inversa del conexo $\{0\}$, no es necesariamente otro espacio conexo.

c) Sea $L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = nx^2\}$. Entonces el subespacio $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ con la métrica euclideana inducida es conexo. 1 **punto**

Solución: Verdadero. Cada L_n es conexo, ya que son imagen de $\mathbb{R}$ mediante la función continua $\phi_n(x) = (x, nx^2)$. Además, todos contienen al $(0, 0)$. El espacio $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ también es conexo.

d) Sea $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ el $\mathbb{R}-$espacio vectorial de funciones continuas dotado con la norma del supremo. Entonces el subespacio $\{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : f(x) = f(-x), \forall x \in [0, 1]\}$ es conexo por caminos. **1 punto**

Solución: Verdadero. El subespacio métrico dado tiene la estructura de subespacio vectorial normado. Por lo tanto, por un resultado visto en clases, debe ser conexo por caminos.

3. Use sucesiones para demostrar las siguientes proposiciones:

a) Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ \pi & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es continua solamente en $x \in \{-\sqrt{\pi}\} \cup \{\sqrt{\pi}\}$. Puede asumir la continuidad en estos puntos. **1 punto**

Solución: Supongamos que f es continua en $x \in \mathbb{R}$. Por densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^c$, existen sucesiones $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$x = \lim_{n\to\infty} q_n$$
$$x = \lim_{n\to\infty} i_n$$

Por continuidad,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} q_n^2 = (\lim_{n\to\infty} q_n)^2 = x^2$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(i_n) = \lim_{n\to\infty} \pi = \pi$$

Es decir, f solo podría ser continua en $x = \pm\sqrt{\pi}$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y definimos $T_f := \{w \in \mathbb{R} : f(x + w) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Demuestre que si T_f es denso en $\mathbb{R}$, entonces f es constante. **1 punto**
Indicación: Demuestre que $f(x) = f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y piense en cómo se relacionan $f(w)$ y $f(0)$, si $w \in T_f$.

Solución: Sea $x \in \mathbb{R}$. Por densidad, existe una sucesión $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elemtnos de T_f tal que

$$x = \lim_{i\to\infty} w_i$$

Pero por continuidad,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{i\to\infty} f(w_i) \\ &= \lim_{i\to\infty} f(w_i + 0) \\ &= \lim_{i\to\infty} f(0) \\ &= f(0) \end{aligned}$$

Como x es arbitrario, concluimos que $f(x) = f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$. **1 punto**

Solución: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A convergente a x. Demostraremos que $x \in A$. Por continuidad y por la definción de A se tiene,

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(-x_n) = f(\lim_{n\to\infty} -x_n) = f(-x).$$