Universidad de Chile

Facultad de Ciencias

Análisis real | Ayudantía 8

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

1. Use sucesiones para demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, y $A \subset X$, entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
   Solución: Sea $y \in f(\overline{A})$. Por definición de imagen, existe $x \in \overline{A}$ tal que $f(x) = y$. Pero por la caracterización de la clausura por sucesiones, existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

   Pero como f es continua,

   $$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= f(\lim_{n\to\infty} a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \end{aligned}$$

   Es decir, la sucesión $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A)$ converge a y. Por la caracterización mencionada anteriormente, $y \in \overline{f(A)}$.

   b) Si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y tales que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Demuestre que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
   Solución: Sea $x \in \mathbb{R}$. Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$. Luego,

   $$\begin{aligned} f(x) &= f(\lim_{n\to\infty} q_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(q_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} g(q_n) \\ &= g(\lim_{n\to\infty} q_n) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

   Hemos utilizado que $f(q_n) = g(q_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y que f y g son funciones continuas.

c) Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas. Demuestre que $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
Solución: Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, una sucesión convergente a x de elementos de A. Demostremos que $x \in A$.
Para ello, vemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lim_{n\to\infty} a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} g(a_n) \\ &= g(\lim_{n\to\infty} q_n) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Hemos utlizado que $a_n \in A$, y por ende, $f(a_n) = g(a_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ epiyectiva y continua. Demuestre que $f(\mathbb{Q})$ es denso en X.
Solución: Debemos demostrar que $\overline{f(\mathbb{Q})} = X$. Ya sabemos que $\overline{f(\mathbb{Q})} \subset X$, así que nos bastaría demostrar que $X \subset \overline{f(\mathbb{Q})}$.
Sea $x \in X$. Por la epiyectividad, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $x = f(r)$, y por densidad de los racionales en los reales, existe $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ tal que $r = \lim_{n\to\infty} q_n$. Así,

$$x = f(r) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n)$$

Como la sucesión $\{f(q_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(\mathbb{Q})$, concluimos que $x \in \overline{f(\mathbb{Q})}$.

2. Considere el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en $x_0 = 0$, pero discontinua en $x_0 \neq 0$.
Solución: Supongamos que f es continua en x. Por demostrar que $x = 0$.
Por densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{Q}^c$ en $\mathbb{R}$, existen $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ y $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^c$ tales que

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} q_n \\ x &= \lim_{n\to\infty} i_n \end{aligned}$$

Pero como f es continua en x,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} q_n = x \\ f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(i_n) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 0$.

3. Sea $f : X \longrightarrow X$ una isometría. Dado $x \in X$, considere la sucesión $x_0 := x$ y $x_n = f(x_{n-1})$, para $n \geq 1$. Pruebe que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $x_n = x$, para todo $n \geq 0$.
Solución: Notemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}))$$

Pero como f es isometría,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(x_n, x_{n-1}).$$

En particular, $d(x_{n+1}, x_n) = d(x_1, x_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por otro lado, sabemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y por tanto, es de Cauchy. Luego, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m \geq N$$

Fijando $n = N + 1$ y $m = N$, lo anterior es equivalente a que, para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{N+1}, d_N) < \epsilon \tag{1}$$

Pero como $d(x_1, x_0) = d(x_{N+1}, x_N)$, vemos que $d(x_1, x_0) < \epsilon$. Esto se puede hacer siempre, independiente de N, por lo que, $d(x_1, x_0) = 0$.
Otra forma de justificar esto, es asumir que $d(x_1, x_0) > 0$, y tomar $\epsilon := \frac{d(x_1,x_0)}{2}$ en la ecuación (1). Esto nos lleva a una contradicción, pues $d(x_1, x_0) = d(x_{N+1}, d_N) < \epsilon = \frac{d(x_1,x_0)}{2}$. Una contradicción. Por lo tanto, $d(x_1, x_0) = 0$. Pero como $d(x_{n+1}, x_n) = d(x_1, x_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $d(x_{n+1}, x_n) = 0$ y $x_{n+1} = x_n = x_{n-1} = ... = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$.