Universidad de Chile

Facultad de Ciencias

Análisis real | Ayudantía 7

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

1. Decida si los siguientes espacios métricos son o no conexos:

   a) $X = [-1, 0) \cup (0, -1]$ con la métrica inducida por el valor absoluto.
   Solución: Note que $A = [-1, 0)$ y $B = (0, 1]$ es una escisión de X, por ser subconjuntos abiertos no vacios y disjuntos de X, cuya unión es X.

   b) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con la métrica inducida.
   Solución: Tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q}^c$ no son conexos:

   $$\mathbb{Q} = ((-\infty, \pi) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\pi, \infty) \cap \mathbb{Q})$$
   $$\mathbb{Q}^c = ((-\infty, 1) \cap \mathbb{Q}^c) \cup ((1, \infty) \cap \mathbb{Q}^c)$$

   c) $X = \{a\}$ con la métrica $d(a, a) = 0$.
   Solución: X es conexo, pues los únicos sunconjuntos abiertos y cerrados a la vez, son $\{a\}$ y ϕ.

   d) $X = \{x\} \cup \{y\}$, con $x \neq y$, dotado con la métrica discreta.
   Solución: $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$ son abiertos no vacíos y disjuntos en X. Luego ambos, forman una escisión de X, cuya unión es X. Por lo tanto, X no es conexo.

   e) Para (X, d) un espacio métrico, el subespacio

   $$Y := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$$

   donde $X \times X$ es dotado de la métrica producto.
   Solución: La función $\phi : X \longrightarrow Y$ dada por $\phi(x) = (x, x)$ es un homeomorfismo. Luego, $Y \cong X$. Así, Y es conexo, si y sólo si, X lo es.

   f) $(\mathbb{R}^{2023} \times S^1 \times (-\pi, \pi))^{2023}$ con la métrica producto.
   Solución: Producto finito de conexos, es conexo.

   g) Sea $A_n := L_n \subset \mathbb{R}^2$ la recta que une al punto $(0, 0)$ con el punto $(1, \frac{1}{n})$ con la métrica inducida. ¿Qué sucede con $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$?
   Solución: Cada L_n es de hecho conexo por caminos. Los puntos de la recta L_n tienen la forma $(t, \frac{1}{n}t)$, con $t \in [0, 1]$. Para probar la conexidad por caminos, tomamos dos elementos aribitrarios de L_n, digamos, $z = (t_1, \frac{1}{n}t_1)$ y $w = (t_2, \frac{1}{n}t_2)$. Entonces, $\phi : [0, 1] \longrightarrow L_n$ dado por

   $$\phi(t) = ((1 - t)t_1 + t \cdot t_2, \frac{1}{n}((1 - t)t_1 + t \cdot t_2))$$

es un camino tal que $\phi(0) = z$ y $\phi(1) = w$.
La unión de los L_n también será conexo, pues es una unión de espacios conexos con un punto en común (todos contienen al $(0,0)$).

h) Con el espacio A definido antes, el espacio $T = A - \{(0,0)\}$.
Solución: No es conexo. Si tomamos $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{\sqrt{2}}x\} \cap A$ y $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{1}{\sqrt{2}}x\} \cap A$, ambos son subconjuntos abiertos no vacios y disjuntos de A, cuya unión es A.

i) $\Gamma_n := \{(t, -2t^n) : t \in [0,1]\}$, con la métrica inducida. ¿Qué sucede con $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$?
Solución: La función $\phi : [0,1] \longrightarrow \Gamma_n$, dada por $\phi(t) = (t, -2t^n)$ es un homeomorfismo (¿por qué?). Luego, $[0,1] \cong \Gamma_n$, y por lo tanto, Γ_n es conexo.
Al igual que en el ejercicio *g*), la unión también será conexa, por ser la unión de conexos con un punto en común.

j) En el espacio $\mathbb{R}$- espacio vectorial $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ de funciones continuas con la métrica del supremo, el subespacio $\mathcal{P}_n$ de polinomios de grado a lo más n.
Solución: Los subespacios vectoriales son siempre espacios conexos (ver clases).

2. Sea (X,d) un espacio métrico.

a) Sea $f : (X,d) \longrightarrow (\{0,1\}, d_{01})$, donde X es conexo y f continua. Demuestre que f es constante.
Solución: Por las hipótesis, vemos que $f(X)$ debe ser conexo en $(\{0,1\}, d_{01})$, pero como ya vimos en la parte 1 letra *b*), los únicos conexos en un espacio discreto son los singleton. Así, $f(X) = \{0\}$ ó $f(X) = \{1\}$. En ambos casos, la función f será constante.

b) Muestre que si toda función continua $f : (X,d) \longrightarrow (\{0,1\}, d_{01})$ es constante, entonces X es conexo.
Solución: Si X no es conexo, existen A y B abiertos no vacios, disjuntos y tales que $X = A \cup B$. La función $f : (X,d) \longrightarrow (\{0,1\}, d_{01})$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in A \\ \\ 1 & si \quad x \in B \end{cases}$$

está bien definida y no es constante. Si logramos probar que es continua, obtendremos una contradicción. Para ello, vemos que los únicos sunconjuntos abiertos en la llegada de f son: $\{0,1\}, \phi, \{0\}, \{1\}$. Las respectivas imagenes inversas son:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0,1\}) &= X \\ f^{-1}(\phi) &= \phi \\ f^{-1}(\{0\}) &= A \\ f^{-1}(\{1\}) &= B \end{aligned}$$

Todos subconjuntos abiertos de X.

3. Demuestre que $(0,1) \ncong (0,1]$ y $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^n$, con $n > 1$.
Solución: Supongamos que $(0,1) \cong (0,1]$. Es decir, existe $f : (0,1] \longrightarrow (0,1)$ un homeomofismo. Entonces, $f^* : (0,1] - \{1\} \longrightarrow (0,1) - \{f(1)\}$, dada por $f^*(x) = f(x)$, para $x \in (0,1] - \{1\}$, sigue siendo un homeomorfismo (¿por qué?). Pero esto es una contradicción, ya que $(0,1] - \{1\} = (0,1)$ es conexo por ser un intervalo, mientras que $(0,1) - \{f(1)\}$ no lo es.
De manera similar, podemos probar que $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^n$. Si a $\mathbb{R}$ le removemos un punto, se pierde la conexidad, mientras que si lo hacemos en $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, no (de hecho, en clases probaron que $\mathbb{R}^n - \{a\}$, con $n > 1$, es conexo por caminos).