Universidad de Chile

Facultad de Ciencias

Análisis real | CONTROL 2

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

INSTRUCCIÓN: Debe responder las Preguntas 1 y 3, y otra a elección suya entre la 2 y la 4.

1. (2 pts.) Si la función $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \lambda)$ es continua en X. Demuestre que si $A \in \mathcal{F}_\sigma$ en Y, entonces $f^{-1}(A^c) \in \mathcal{G}_\delta$ en X.

   Solución: Sea $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Luego por definición,
   $$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$
   donde $F_n \subset Y$ son conjuntos cerrados en Y, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si tomamos commplemento en A, obtenemos que,
   $$A^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c.$$
   Note que cada F_n^c es un subconjunto abierto de Y, y por continuidad, cada $f^{-1}(F_n^c)$ es un abierto en X. Así, tomando preimagen en A^c, se tiene que:
   $$\begin{aligned} f^{-1}(A^c) &= f^{-1}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c\Big) \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(F_n^c) \in \mathcal{G}_\delta. \end{aligned}$$

2. a) (1.5 pts.) Sean (X, d_1), (Y, d_2) y (Z, d_3) espacios métricos. Considere el espacio métrico producto $(X \times Y \times Z, p)$, con $p((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2) + d_3(z_1, z_2)$. Demuestre que,
   $$\overline{(A \times B \times C)} = \overline{A} \times \overline{B} \times \overline{C},$$
   para $A \subset X, B \subset Y$ y $C \subset Z$.

   Solución: Sea $(x, y, r) \in \overline{(A \times B \times C)}$ y $\epsilon > 0$. Por definición, existe $(z, w, v) \in A \times B \times C$ y $(z, w, v) \in B((x, y, r), \epsilon)$. Es decir,
   $$z \in A \wedge w \in B \wedge v \in C \wedge p((x, y, r), (z, w, v)) < \epsilon$$
   Lo cual es equivalente a que,
   $$z \in A \wedge w \in B \wedge v \in C \wedge d_1(x, z) < \epsilon \wedge d_2(y, w) < \epsilon \wedge d_3(r, v) < \epsilon$$

Lo anterior nos entrega tres afirmaciones:

$$\begin{aligned} z &\in A \cap B_X(x, \epsilon) \\ w &\in B \cap B_Y(y, \epsilon) \\ v &\in C \cap B_Z(r, \epsilon) \end{aligned}$$

Es decir, $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$ y $r \in \overline{C}$. Por lo tanto, $(x, y, r) \in \overline{A} \times \overline{B} \times \overline{C}$. Como todos los pasos fueron equivalentes, y $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\overline{(A \times B \times C)} = \overline{A} \times \overline{B} \times \overline{C}$.

b) (0.5 pts.) Considerando el literal a), considere $D_1 \subset X, D_2 \subset Y$ y $D_3 \subset Z$, los cuales son densos en X, Y y Z, respectivamente. Demuestre que $D_1 \times D_2 \times D_3$ es denso en $X \times Y \times Z$.

Solución: Basta utilizar la parte anterior y que $\overline{D_1} = X, \overline{D_2} = Y$ y $\overline{D_3} = Z$:

$$\overline{D_! \times D_2 \times D_3} = \overline{D_1} \times \overline{D_2} \times \overline{D_3} = X \times Y \times Z.$$

3. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.

a) (1 pto.) Si $\overset{\circ}{A} = \varnothing$ y $(\overset{\circ}{A^c}) = \varnothing$, entonces $\partial A = X$.
Solución: Por definición:

$$(\partial A)^c = (\overline{A} \cap \overline{A^c})^c$$

Por la ley de Morgan:

$$(\partial A)^c = (\overline{A})^c \cup (\overline{A^c})^c = (A^c)^\circ \cup ((A^c)^c)^\circ = (A^c)^\circ \cup (A)^\circ = \phi \cup \phi = \phi$$

Así, $(\partial A)^c = \phi$. Por lo tanto, $\partial A = X$.

b) (1 pto.) Si A es abierto en X, demuestre que $(\overset{\circ}{\partial A}) = \varnothing$.
Solución: Sabemos que

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

Tomando interior y utulizando la propiedad $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,

$$\begin{aligned} (\partial A)^\circ &= (\overline{A})^\circ \cap (\overline{A^c})^\circ \\ &= (\overline{A})^\circ \cap ((A^\circ)^c)^\circ \end{aligned}$$

Pero como A es abierto, sabemos que $A = A^\circ$, entonces

$$(\partial A)^\circ = (\overline{A})^\circ \cap (A^c)^\circ = (\overline{A})^\circ \cap (\overline{A})^c \subset \overline{A} \cap (\overline{A})^c = \phi$$

Es decir, $(\partial A)^\circ = \phi$.

4. a) (1 pto) Sean $f : (X, d) \longrightarrow (Y, r)$ una función continua y $A \subset Y$. Demuestre que

$$f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right) \subseteq \left(\overset{\circ}{f^{-1}(A)}\right).$$

Indicación: *Recuerde que la continuidad en $x \in X$ implica que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.*

Solución: Sea $x \in f^{-1}(A^\circ)$. Por definición de preimagen, existe $y \in A^\circ$, tal que $y = f(x)$. Por definición de interior, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(y, \epsilon) = B(f(x), \epsilon) \subset A$$

Por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon).$$

Afirmamos que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(A)$. En efecto, sea $z \in B(x, \delta)$. Por continuidad, $f(z) \in B(f(x), \epsilon) \subset A$, y por ende, $x \in f^{-1}(A)$.
Por lo tanto, $x \in \left(f^{-1}(A)\right)^\circ$.

b) (1 pto.) Sean $f : (X, d_{01}) \longrightarrow (Y, d_{01})$ una función y $A \subset X$. ¿Es cierto que

$$f(\overset{\circ}{A}) \subseteq (f(\overset{\circ}{A}))?$$

Indicación: *Piense como son los abiertos de un espacio métrico discreto.*

Solución: De hecho se tiene la igualdad de ambos conjuntos, independiente de A. Sabemos que todos los subconjuntos de X e Y son abiertos, por estar ambos espacios dotados de la métrica discreta. Así, $(f(A))^\circ = f(A)$ y $A = A^\circ$. Por lo tanto,

$$f(A^\circ) = f(A) = (f(A))^\circ.$$