Universidad de Chile

Facultad de Ciencias

Análisis real | Ayudantía 5

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

---

1. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.

   a) Si A es abierto en X, muestre que $\partial A = \overline{A} \cap A^c$.

   Respuesta: La frontera de A es $\overline{A} \cap \overline{A^c}$. Pero, $\overline{A^c} = (A^\circ)^c$, y como A es abierto, $\overline{A^c} = (A^\circ)^c = A^c$. Así, $\partial A = \overline{A} \cap A^c$.

   b) Sea $f\colon (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continua. Considere el conjunto abierto

   $$A := \{x \in X \colon f(x) > 0\}.$$

   Demuestre que para todo $x \in \partial A$ se verifica $f(x) = 0$.

   Respuesta: Aunque el problema no lo pide, veamos porqué A es abierto en X.
   Sabemos que $(0, +\infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$, y que f es continua, luego $f^{-1}((0, +\infty))$ también debe ser abierto en X. De hecho,

   $$f^{-1}((0, +\infty)) := \{x \in X : f(x) \in (0, +\infty)\} = \{x \in X : f(x) > 0\} = A.$$

   Sea $x \in \partial A$. Por la parte anterior, $x \in \overline{A}$ y $x \in A^c = \{x \in X : f(x) \leq 0\}$. Esta última afirmación, nos dice que $f(x) \leq 0$, y así, solo nos restaría probar que $f(x) \geq 0$, para concluir que $f(x) = 0$.
   Por contradicción, supongamos que $f(x) < 0$. Por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $f(z) < 0$, para todo $z \in B(x, \delta)$. Pero además, $x \in \overline{A}$, e implica que, $B(x, \delta) \cap A \neq \phi$. Es decir, existe $z \in B(x, \delta)$ y $z \in A$. Luego, $f(z) > 0$ y $f(z) < 0$. Contradicción.
   Por lo tanto, $f(x) = 0$.

2. Sea (X, d) espacio métrico y $A \subset X$ denso en X. Muestre que:

   a) $(A^c)^\circ = \phi$.

   Respuesta: Sabemos que $\overline{A} = X$. Tomando complemente, esto es equivalente a $\overline{A}^c = \phi$. Pero la formula de dualidad entre clausura e interior nos dice que $(A^c)^\circ = \overline{A}^c$. Junto lo anterior, $(A^c)^\circ = \phi$.

b) $d(r, A) = 0$, para todo $r \in X$.

Respuesta: En clases se demostró que $d(r, A) = d(r, \overline{A})$. Pero como $\overline{A} = X$, se tiene que $d(r, A) = d(r, X) = 0$.

c) Si $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, la densidad de A se puede caracterizar de la siguiente forma: dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, siempre existe $a \in A$ tal que $x < a < y$. (*OPCIONAL*)

Respuesta: Supongamos que A es denso en $\mathbb{R}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Por la parte anterior, $d(\frac{x+y}{2}, A) = 0$. Para $\epsilon := \frac{y-x}{2} > 0$, existe $a \in A$ tal que

$$d(\frac{x+y}{2}, A) + \epsilon > |\frac{x+y}{2} - a|,$$

esto último, usando la caracterización del ínfimo [1] Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{2} > |\frac{x+y}{2} - a| &\implies -\frac{y-x}{2} < \frac{x+y}{2} - a < \frac{y-x}{2} \\ &\implies \frac{y-x}{2} > a - \frac{x+y}{2} > -\frac{y-x}{2} \\ &\implies y > a > x \end{aligned}$$

Recíprocamente, asumamos que se tiene caracterización, y mostremos que A es denso. Sean $\epsilon > 0$ y $r \in \mathbb{R}$. Tomando $x := r - \epsilon$ e $y := r + \epsilon$ en la caracterización, debe existe $a \in A$ tal que $r - \epsilon < a < r + \epsilon$, donde esta última desigualdad es equivalente a que $|r - a| < \epsilon = \epsilon + 0$. Luego, por la caracterización del ínfimo, se tiene que $\inf\{|r - a| : a \in A\} = 0$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $d(r, A) = 0$, para todo $r \in \mathbb{R}$, y por ende, A es denso en $\mathbb{R}$.

d) Demuestre que $A = \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$. (*OPCIONAL*)

Respuesta: Utilizaremos la caracterización dada para conjuntos densos en $\mathbb{R}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^N} < y - x$$

Es decir,

$$1 < 2^N y - 2^N x$$

Luego, como la diferencia entre $2^N x$ y $2^N y$ es mayor a 1, debe existir un entero $m \in \mathbb{Z}$[2] tal que

$$2^N x < m < 2^N y.$$

Es decir,

$$x < \frac{m}{2^N} < y.$$

Como $\frac{m}{2^N} \in A$ y $x, y \in \mathbb{R}$ eran arbitrarios, concluimos que A es denso en $\mathbb{R}$.

3. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \lambda)$ una función continua, y $A \subset \mathbb{R}$ no vacío.

a) Demuestre que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Respuesta: Sea $y \in f(\overline{A})$. Por definición, existe $z \in \overline{A}$ tal que $f(z) = y$.
Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Queremos demostrar que $B(y, \epsilon) \cap f(A) \neq \phi$. Es decir, buscamos $a \in A$

[1] Recuerdo: Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Entonces A tiene ínfimo, digamos $\alpha \in \mathbb{R}$, y es tal que, para todo $\epsilon > 0$, hay un $a \in A$ tal que $\alpha + \epsilon > a$

[2] En concreto, $m = [2^N x] + 1$, donde $[\cdot]$ es la función parte entera.

tal que $f(a) \in B(y, \epsilon)$.
Primero, utilizaremos la continuidad de f sobre z. Para el $\epsilon > 0$ dado, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, para todo x:

$$d(x, z) < \delta \implies \lambda(f(x), f(z)) < \epsilon.$$

Como $z \in \overline{A}$, existe $a \in A$ tal que $a \in B(z, \delta)$. Es decir, existe $a \in A$ tal que $d(a, z) < \delta$.
En la continuidad, podemos tomar $x := a$, y tendremos que $\lambda(f(a), f(z)) < \epsilon$, lo cual es equivalente a que, $f(a) \in B(y, \epsilon)$.

b) Muestre con un ejemplo que la contención anterior no es en general una igualdad.

Respuesta: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = Arctan(x)$. Tomando $A = (0, +\infty)$, vemos que $f(\overline{(0, +\infty)}) = f([0, \infty)) = [0, \frac{\pi}{2})$, y $\overline{f((0, \infty))} = \overline{(0, \frac{\pi}{2})} = [0, \frac{\pi}{2}]$.

c) Si además f es epiyectiva, demuestre que f mapea densos en densos.

Respuesta: Sea $A \subset X$ denso. Por demostrar, que $f(A)$ es denso en Y. Usando el ejercicio anterior, tenemos que:

$$f(X) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)},$$

pero f es epiyectiva, por lo que

$$Y \subset \overline{f(A)} \subset Y,$$

y se concluye que $\overline{f(A)} = Y$.

4. Sean (X, d) e (Y, λ) espacios métricos y $(X \times Y, p)$ el espacio métrico producto, donde $p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2)$. Demuestre que

$$Cl_{X \times Y}(A \times B) = Cl_X(A) \times Cl_Y(B)$$

si $A \subset X$ y $B \subset Y$, ambos no vacíos. Aquí, $Cl(A) := \overline{A}$.

Respuesta: Sea $(x, y) \in Cl_{X \times Y}(A \times B)$ y $\epsilon > 0$. Por definición, existe $(z, w) \in A \times B$ y $(z, w) \in B((x, y), \epsilon)$. Es decir,

$$z \in A \wedge w \in B \wedge p((x, y), (z, w)) < \epsilon$$

Lo cual es equivalente a que,

$$z \in A \wedge w \in B \wedge \lambda((x, z)) < \epsilon \wedge d(y, w) < \epsilon$$

En la última desigualdad, hemos utilizado el siguiente resultado: Si $a + b < c$, y $a, b, c > 0$, entonces $a < c$ y $b < c$.
Lo anterior nos entrega dos afirmaciones:

$$z \in A \cap B_X(x, \epsilon) \neq \phi$$
$$w \in B \cap B_Y(y, \epsilon) \neq \phi$$

Es decir, $x \in \overline{A}$ y $y \in \overline{B}$. Por lo tanto, $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$. Como todos los pasos fueron equivalentes, y $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $Cl_{X \times Y}(A \times B) = Cl_X(A) \times Cl_Y(B)$.

5. Sea el $\mathbb{R}$ espacio vectorial

$$\mathcal{S} := \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{es convergente a } 0\},$$

y $c_0 := \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} : \exists N \in \mathbb{N}, \, a_n = 0, \; \forall n \geq N\} \subset \mathcal{S}$. Dote a $\mathcal{S}$ de la norma

$$||\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}|| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

(*¿por qué es una norma?*). Si a $\mathcal{S}$ lo dotamos de la métrica inducida por $|| \cdot ||$, muestre que:

a) $c_0^\circ = \phi$.

Respuesta: Como $(\mathcal{S}, ||\cdot||)$ es un espacio vectorial normado, basta con demostrar que c_0 es un subespacio de él. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por definición, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $a_n = 0$, para todo $n \geq N_1$ y $b_n = 0$, para todo $n \geq N_2$. En particular, para $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que $a_n = b_n = 0$, para todo $n \geq N$. Luego,

$$\alpha a_n + \beta b_n = 0, \forall n \geq N.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

b) $\overline{c_0} = \mathcal{S}$. Concluya que los subespacios vectoriales no siempre son cerrados.

Respuesta: Por la pregunta 1, basta demostrar que $d(a, c_0) = 0$, para todo $a := \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$. Sea $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ y $\epsilon > 0$. Buscamos $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ tal que $||a - b|| < 0 + \epsilon = \epsilon$, y por definición de ínfimo, tendremos que $d(a, c_0) = 0$.
Como $a \in \mathcal{S}$, por definición, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq N$. Construimos el siguiente candidato para $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$b_n := \begin{cases} a_n & si \quad n < N \\ \\ 0 & si \quad n \geq N \end{cases}$$

Claramente, $b \in c_0$ y además,

$$||a - b|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| = \sup_{n\geq N} |a_n| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Por lo tanto, $d(a, c_0) = 0$, y como a fue arbitrario, concluimos que c_0 es denso en $\mathcal{S}$.
Si c_0 fuese cerrado, se tendría que $\overline{c_0} = c_0$, pero por lo anterior, $\mathcal{S} = c_0$, lo cual es absurdo.

6. Sea $\mathcal{C}([0,1],[0,1])$ el espacio de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ con la métrica del supremo. Demuestre que el subconjunto de homeomorfismos de $[0,1]$ en $[0,1]$ tiene interior vacío en $\mathcal{C}([0,1],[0,1])$. (*PENDIENTE*)