ANÁLISIS REAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS – UNIVERSIDAD DE CHILE

1. Distancias y ejemplos de espacios métricos

1.- Demuestre que si (X,d) es un espacio métrico y el conjunto X tiene al menos n elementos, entonces
$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \ldots + d(x_{n-1},x_n),$$
donde $x_i \in X$ para todo $i = 1,\ldots,n$.

2.- Si (X,d) es un espacio métrico. Demuestre que
$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w).$$

3.- Si (X,d) es un espacio métrico. Demuestre que
$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

4.- Determine si $(\mathbb{R},d)$ con $d(x,y) = (x-y)^2$ es un espacio métrico o no.

5.- Si $(E,d_1),(E,d_2),\ldots,(E,d_n)$ son espacios métricos. Determine si (E,d^*) con
$$d^*(x,y) = d_1(x,y) + \ldots + d_n(x,y)$$
es un espacio métrico o no.

6.- Sea $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función creciente tal que $f(0)=0$ y ademas verifica la propiedad:
$$f(t+s) \leq f(t) + f(s) \quad \text{para todo } t,s \geq 0.$$

a) Demuestre que si existe $s>0$ tal que $f(s)=0$, entonces f es nula en $[0,\infty)$, es decir $f(u)=0$ para todo $u \geq 0$.

b) Demuestre que si f no es nula y (E,d) es un espacio métrico. Entonces
$$d_1(x,y) = f(d(x,y))$$
tambien define una distancia sobre E.

7.- Demuestre que
$$d_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$
define una distancia sobre $\mathbb{R}$. *Ayuda:* utilice el ejercicio anterior.

8.- Sea (E,d) un espacio métrico y $a \in E$. Definamos $d_1\colon E\times E \to [0,\infty)$ como $d_1(x,y)=0$ si y sólo si $x=y$ y ademas
$$d_1(x,y) = d(x,a) + d(a,y) \quad \text{si } x \neq y.$$
Demuestre que d_1 define una distancia sobre E.

Date: Otoño 2023.

9.- Demuestre que
$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$
define una distancia sobre $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

10.- Considere el conjunto
$$\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada en } \mathbb{R}\}$$
y demuestre que
$$d(f,g) = ||f-g||_\infty := \sup_{t\in(-\infty,+\infty)} |f(t)-g(t)|,$$
define una distancia sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Ayuda:* Aqui se puede adaptar creativamente un importante ejemplo visto en clases.

11.- Demuestre que
$$d(f,g) := \Big(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$
define una distancia sobre $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

12.- Sea E un conjunto y considere la función $d\colon E\times E \to [0,+\infty)$ con las siguientes propiedades para todo $x,y,z \in E$:

i) $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = 0$,
ii) $d(x,y) = d(y,x)$,
iii) $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(y,z))\}$.

a) Demuestre que d es una distancia. Con esta distancia particular se dice que (E,d) es un **espacio ultramétrico** y estudiaremos sus propiedades mas adelante.
b) Demuestre que si $x,y,z \in E$ entonces al menos dos de los números $d(x,y)$,$d(y,z)$ y $d(z,x)$ son iguales. Esto significa que en un espacio ultramétrico todos los triangulos son isóceles.

13.- Sabemos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ denota el conjunto de partes de $\mathbb{N}$ (el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$). Consideremos la función $d\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,+\infty)$ definida como
$$d(A,B) = \begin{cases} 0 & \text{si y solo si} \quad A = B \\ (n+1)^{-1} & \text{donde} \quad n \text{ es el elemento minimal de } A \triangle B. \end{cases}$$

Recordemos que la diferencia simetrica entre dos conjuntes es
$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$ es un espacio ultramétrico.

14.- Dado un conjunto no vacío X se dice que la función $e\colon X\times X \to [0,+\infty]$ define una *brecha* sobre X si[1]:

i) Si $x = y$ entonces $e(x,y) = 0$,
ii) $e(x,y) = e(y,x)$ para todo $x,y \in X$,
iii) $e(x,y) \leq e(x,z) + e(z,y)$ para todo $x,y,z \in X$.

Mencione cuales son las diferencias entre una distancia y una brecha. Proporcione ejemplos de brechas.

[1]En la literatura francesa, a esta función se la llama *écart*

15.- Si (X, e) e (Y, f) son dos espacios metricos, demuestre que
$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{e(x_1, y_1), f(x_2, y_2)\}$$
y
$$\tilde{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{e(x_1, y_1)^2 + f(x_2, y_2)^2}$$
definen una distancia sobre el conjunto $X \times Y$.

2. Distancias, distancia de punto a conjunto.

1.- Sea Z un conjunto y (E, d) un espacio métrico. Si $f\colon Z \to E$ es una función inyectiva, demuestre que
$$\tilde{d}(x, y) = d(f(x), f(y))$$
es una distancia sobre Z.

2.- Demuestre que $d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$ define una distancia sobre $\mathbb{N}$.

3.- Definamos el conjunto $\tilde{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ y definamos la función $e\colon \tilde{\mathbb{N}} \times \tilde{\mathbb{N}} \to [0, +\infty) \cup \{\infty\}$ como sigue:
$$e(n, m) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, \quad e(n, \infty) = e(\infty, n) = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad e(\infty, \infty) = 0.$$
¿Es e una distancia sobre $\tilde{\mathbb{N}}$?.

4.- Sea (E, d) un espacio métrico y $f\colon E \to \mathbb{R}$, determine si $e\colon E \times E \to [0, +\infty)$ definida por
$$e(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$
es una distancia sobre E.

5.- Considere los espaciós métricos $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ y $(\mathbb{R}^m, ||\cdot||_2)$. Si $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función lineal ¿Podemos decir que L es una inmersión isométrica?

6.- Considere el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ¿cuál es la distancia $d(x, \mathbb{Q})$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$?.

7.- Sea (E, d) un espacio métrico tal que $a \in E$ y $S \subset E$ (con $S \neq \varnothing$). Demuestre que
$$d(a, S) \leq d(a, b) + d(b, S) \quad \forall\, b \in E$$

8.- Sea (E, d) un espacio métrico tal que $a \in E$,$a' \in E$ y $S \subset E$ (con $S \neq \varnothing$).
El **diámetro** del conjunto S se define como
$$Diam(S) = \sup\{d(u, v)\colon u \in S, v \in S\}.$$
Demuestre que
$$|d(a, S) - d(a', S)| \leq d(a, S) + Diam(S) + d(a', S).$$

9.- Sea (E, d) un espacio métrico donde d es la **distancia discreta**. Si $a \in E$ y $S \subset E$ (con $S \neq \varnothing$). ¿Cual es el valor de $d(a, S)$?.

10.- Sea (E, d) un espacio métrico donde $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ y la distancia es $d(f, g) = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.
Sea $B \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ descrito por
$$B = \{h \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid e^x \leq h(x) \leq e\}$$

Si $p(x) = \cos(x)$ ¿cuál es la distancia $d(p, B)$?

11.- De un ejemplo de espacio métrico (E, d) tal que $A \subset E$ y $B \subset E$ (ambos no vacíos) tales que $A \cap B$ y $d(A, B) = 0$.

12.- Sea $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ un espacio métrico y considere el subconjunto

$$B = \left\{ \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Calcule $d(0, B)$.

13.- Si (E, d) un espacio métrico tal que $S \subset E$ (con $S \neq \varnothing$) y (como en el Ejericio 8) el **diámetro** del conjunto S se define como

$$Diam(S) = \sup \{d(u, v) \colon u \in S, v \in S\}.$$

¿Podemos decir que siempre $Diam(S) < \infty$? (Ayuda: pensar en el Axioma del Supremo).

14.- Si (E, d) un espacio métrico tal que $S \subset E$ (con $S \neq \varnothing$) y $a \in E$. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $d(a, x) - d(a, S) < \varepsilon$.

3. Funciones Continuas

1.- Si $f \colon (X, d) \to (X, d)$ y $g \colon (X, d) \to (X, d)$ son Lipschitzianas, demuestre que $f \circ g \colon (X, d) \to (X, d)$ y $g \circ f \colon (X, d) \to (X, d)$ son Lipschitzianas.

2.- Sea (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$ un subconjunto no vacío. Considere la función $f \colon (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por

$$f(x) = d(x, M)$$

¿Es f Lipschitziana?

3.- Si $f \colon (X, d) \to (Y, \lambda)$ y $g \colon (Y, \lambda) \to (Z, \eta)$ son homeomorfismos. ¿Es la función $(g \circ f) \colon (X, d) \to (Z, \eta)$ un homeomorfismo?

4.- ¿Cómo son las isometrías $f \colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$?

5.- Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consideremos la función $H_\lambda : V : V$ definida por $H_\lambda(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.

i) ¿Es H_λ un homeomorfismo?

ii) ¿Es H_λ Lipschiztiana?

iii) ¿Para que valores de λ se tiene que H_λ es una isometría?

6.- Considere los espacios métricos $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y $(\mathbb{R}, d)$ donde

$$d(x, y) = \text{mín}\{1, |x - y|\}.$$

Recordemos que la función identidad $I_d \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta definida por $I_d(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) ¿Es continua $I_d \colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d)$?

b) ¿Es continua $I_d \colon (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$?

7.- Sean d_1,d_2 y d_3 tres distancias sobre X. Si d_1 es mas fina que d_2 y d_2 es mas fina que d_3 demuestre que d_1 es mas fina que d_3.

8.- Sean d_1 y d_2 dos distancias sobre X. Si estas distancias son equivalentes, demuestre que si $f \colon (X, d_1) \to (Y, \lambda)$ es continua, entonces $f \colon (X, d_2) \to (Y, \lambda)$ también es continua.

9.- Sea (E,d) un espacio métrico donde $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ y la distancia d está definida por $d(f,g) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

Considere la función $T\colon (E,d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por $T(f) = f(1)$.

i) ¿Es T continua?
ii) ¿Es T lipschitziana?
iii) ¿Es T lineal?

10.- Sea (E,d) un espacio métrico donde $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ y la distancia d está definida por $d(f,g) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

Sea $F = [P]([0,1],\mathbb{R})$ el subconjunto de E conformado por las funciones polinomiales.

Considere la función $D\colon (F,d) \to (F,d)$ definida por

$$F(f) = f',$$

donde f' es la derivada de la función.

i) ¿Es D lineal?
ii) ¿Es D continua?

4. Interior, Conjuntos abiertos y Frontera

1.- Considere el espacio métrico (E,d) con

$$E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \quad \text{donde } d(f,g) = ||f-g|| = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

a) ¿La función $T\colon (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ con la regla de asignación

$$Tf = \int_0^1 f(x)\,dx$$

es continua en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$?

b) Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{C}^+ := \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid f(x) > 0 \quad \forall\, x \in [0,1]\}$$

es abierto en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

c) Si $n < m$, demuestre que el conjunto

$$\mathcal{C}_{nm} := \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid n < f(x) < m \quad \forall\, x \in [0,1]\}$$

es abierto en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2.- De un ejemplo de función continua $f\colon (E_1,d_1) \to (E_2,d_2)$ tal que A es abierto en E_1 pero $f(A)$ no es abierto en E_2.

3.- Si $f\colon (E_1,d_1) \to (E_2,d_2)$ es una isometría, ¿Podemos afirmar que si A es abierto en E_1 entonces $f(A)$ es abierto en E_2?.

4.- Si (X,d) es un espacio métrico y $M \subset X$ es no vacío. Demuestre que todo A abierto en X que verifique $A \subset M$ tambien verifica $A \subset \overset{\circ}{M}$.

5.- Si (X,d) es un espacio métrico, $M \subset X$ y $N \subset X$ son no vacíos, demuestre que

$$\overset{\circ}{M} \cup \overset{\circ}{N} \subset \overset{\circ}{(M \cup N)}\ .$$

6.- Si (X, d) es un espacio métrico y $M \subset X$ es no vacío. Determine si

$$d(a, M) = d(a, M^c) = 0$$

implica que $a \in \partial M$.

7.- Dado un espacio métrico (E, d) demuestre que

$$\partial\varnothing = \varnothing \quad \text{y} \quad \partial E = \varnothing.$$

8.- Dados un espacio métrico (E, d) y un subconjunto $A \subset E$ demuestre que $\partial(\partial A) \subset \partial A$.

9.- Dados un espacio métrico (E, d) y los subconjunto $A, B \subset E$, demuestre que

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

10.- Dados un espacio métrico (E, d) y un subconjunto $A \subset E$, determine si la afirmación

$$(\overset{\circ}{A}) = A \setminus \partial A$$

es verdadera.

11.- Sea $(X.d)$ un espacio métrico y $A \subset X$. Demuestre que

$$\partial(\overset{\circ}{A}) \subset \partial A.$$

12.- Dada una función continua $f\colon (X, d) \to (Y, \lambda)$. Si $O \subset Y$ verifica $O \in \mathcal{G}_\delta$ entonces $f^{-1}(O) \subset X$ verifica $f^{-1}(O) \in \mathcal{G}_\delta$.

13.- Decimos que un conjunto X es numerable si existe una función $\phi : X \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva. Demuestre que cada subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ tiene interior vacío en $\mathbb{R}$.

14.- † Sea $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado. Demuestre que todo subespacio V no trivial verifica

$$\overset{\circ}{V} = \varnothing.$$

15.- † En el espacio $\mathcal{F}$ de funciones de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ (no necesariamente continuas) con la métrica $(f, g) \to \sup\{|f(x) - g(x) : x \in [0, 1]\}$, denote por $\mathcal{C}$ la colección de funciones constantes en $\mathcal{F}$. Muestre que $\partial\mathcal{C} = \mathcal{C}$.

16.- Demuestre que $f\colon (X, d) \to (Y, d)$ es continua si y solo si $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}}(A)$ para todo $A \subset Y$.

17.- Con respecto al ejercicio 5, ¿sigue siendo cierto si esta unión es arbitraria?, es decir, ¿se satisface la contención

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A^{\mathrm{o}} \subset \Big(\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A\Big)^{\mathrm{o}}$$

para $\mathcal{C}$ una colección arbitraria de subconjuntos en el espacio métrico?.

18.- En la línea del ejercicio anterior, muestre que

$$\Big(\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A\Big)^{\mathrm{o}} \subset \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A^{\mathrm{o}},$$

sea cual sea, la colección $\mathcal{C}$. Muestre que hay igualdad solo si $\mathcal{C}$ es finito.

19.- Si $f\colon (X,d) \to (Y,\lambda)$ es continua y A, B son subconjuntos de Y, demuestre que
$$f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \cap f^{-1}(\overset{\circ}{B})$$
es abierto en X.

20.- Demuestre que $f\colon (X,d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua si y sólo si para todo $a \in \mathbb{R}$ los conjuntos
$$X_a := \{x \in X\colon f(x) < a\}$$
e
$$Y_a := \{x \in X\colon f(x) > a\}$$
son abiertos en X.

5. Adherencia

1.- Dado un par de funciones continuas $f, g\colon (X,d) \to (Y,\lambda)$ y un subconjunto $A \subset Y$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, demuestre que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{A}$.

2.- Sean (X,d) un espacio métrico. Sean A y G un par de subconjuntos de X tales que G es abierto, Demuestre que $A \cap G = \varnothing$ si y solo si $\overline{A} \cap G = \varnothing$.

3.- Sea (X,d) un espacio métrico tal que A es denso en X. Demuestre que si O es abierto en X y verifica $A \cap O$ entonces $O = \varnothing$.

De igual forma, demuestre que para todo O es abierto en X y no vacío, se verifica que $A \cap O \neq \varnothing$.

4.- Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre que si A es abierto en X entonces
$$\partial A = \overline{A} \cap A^c = \overline{A} \setminus A.$$

5.- Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre que si A es cerrado en X entonces
$$\partial A = A \cap (\overset{\circ}{A})^c = A \setminus (\overset{\circ}{A})$$

6.- Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre que si A es denso en X entonces
$$(\overset{\circ}{A^c}) = \varnothing$$

7.- Dada una función continua $f\colon (X,d) \to (Y,\lambda)$. Si $A \subset Y$ verifica $A \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces $f^{-1}(F) \subset X$ verifica $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_\sigma$.

8.- Dado un espacio métrico (X,d). Se dice que $A \subset X$ es un conjunto *ralo* o *denso en ninguna parte* si
$$(\overset{\circ}{\overline{A}}) = \varnothing$$

Demuestre que si A es abierto en X entonces ∂A es un conjunto ralo. Muestre que $\mathbb{N}$ es *ralo* en $\mathbb{R}$.

9.- † Sea $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$–espacio vectorial normado de dimensión finita. Demuestre que todo subespacio V es ralo.

10.- Muestre que no existen espacios métricos que tengan subconjuntos densos que también sean ralos.

11.- Sea (X,d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A \subset X$. Demuestre que:

1. $Diam(\overline{A}) = Diam(A)$[2].
2. $d(x, A) \leq d(x, \partial A)$.
3. Muestre con un ejemplo que $Diam((\overset{\circ}{A})) \neq Diam(A)$ y que $dist(x, (\overset{\circ}{A})) \neq dist(x, A)$.

12.- † En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, muestre que el conjunto $A := \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso. ¿Podría dar un resultado un poco más general?

13.- † Sea (X, d) un espacio métrico, denote por $\mathcal{C}$ a la colección de todos los subconjuntos densos de X y por $iso(X)$ al conjunto de puntos aislados de X. Demuestre que

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = iso(X).$$

14.- Sea $f\colon (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continua. Considere el conjunto abierto

$$A := \{x \in X : f(x) > 0\}.$$

Demuestre que para todo $x \in \partial A$ se verifica $f(x) = 0$.

15.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demuestre que $A \subset \mathcal{G}_\delta$ si y sólo si $A^c \in \mathcal{F}_\sigma$.

NUEVO!!

16.- Demuestre que todo número irracional es un punto de acumulación de $\mathbb{Q}$

17.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demuestre que si A es denso en X entonces todo elemento de $X \setminus A$ es un punto de acumulación de A.

18.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demuestre que

$$(\overset{\circ}{A^c}) = A^c \cap (A')^c$$

19.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demuestre que si A es cerrado en X entonces contiene a todos sus puntos de acumulación

20.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demuestre que si A es un conjunto ralo, entonces

$$(\overset{\circ}{A}) \cap (\overset{\circ}{A'}) = \varnothing$$

21.- Describa los conjuntos densos en un espacio que está dotado con la métrica discreta.

22.- Muestre que no todas las funciones continuas mapean densos en densos. ¿Cuáles sí lo hacen?

23.- Muestre que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, si dotamos a $\mathbb{R}^n$ de cualquier métrica inducida por una norma.

24.- Sean (X, d) y (X, d') espacios métricos. Muestre con un ejemplo que la frontera de una subconjunto $A \subset X$ depende de la métrica usada.

25.- Muestre que $A \subset X$ es denso en X, si y sólo si, para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $a \in B(x, \epsilon)$.

26.- Suponga que D es denso en X. Muestre que cualquier subconjunto de X que contenga a D también es denso en X.

[2]Para la definición de diámetro de un conjunto S en un espacio métrico, revise el ejercicio 8 de la guía 2.

27.- Sea (X, d) un espacio métrico. Suponga que existe una colección $\{B_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ de abiertos en X disjuntos dos a dos. Demuestre que todo subconjunto denso en X debe ser no numerable.

28.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demuestre que si $\partial A \cap A = \varnothing$ si y sólo si A es abierto en X.