Universidad de Chile
Facultad de Ciencias

Análisis real | Ayudantía 5

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo
Ayudante: Claudio Carrasco
Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

1. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.
   a) Si A es abierto en X, muestre que $\partial A = \overline{A} \cap A^c$.
   b) Sea $f\colon (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continua. Considere el conjunto abierto
   $$A := \{x \in X\colon f(x) > 0\}\,.$$
   Demuestre que para todo $x \in \partial A$ se verifica $f(x) = 0$.
2. Sea (X, d) espacio métrico y $A \subset X$ denso en X. Muestre que:
   a) $(A^c)^\circ = \phi$.
   b) $d(x, A) = 0$, para todo $x \in X$.
   c) Si $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, la densidad de A se puede caracterizar de la siguiente forma: dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, siempre existe $a \in A$ tal que $x < a < y$.
   d) Demuestre que $A = \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.
3. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \lambda)$ una función continua, y $A \subset \mathbb{R}$ no vacío.
   a) Demuestre que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
   b) Muestre con un ejemplo que la contención anterior no es en general una igualdad.
   c) Si además f es epiyectiva, demuestre que f mapea densos en densos.
4. Sean (X, d) e (Y, λ) espacios métricos y $(X \times Y, p)$ el espacio métrico producto, donde $p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2)$. Demuestre que
   $$Cl_{X\times Y}(A \times B) = Cl_X(A) \times Cl_Y(B)$$
   si $A \subset X$ y $B \subset Y$, ambos no vacíos. Aquí, $Cl(A) := \overline{A}$.

5. Sea el $\mathbb{R}$ espacio vectorial

$$\mathcal{S} := \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es convergente a } 0\},$$

   y $c_0 := \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} : \exists N \in \mathbb{N},\, a_n = 0,\ \forall n > N\} \subset \mathcal{S}$. Dote a $\mathcal{S}$ de la norma

$$||\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}|| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

   (*¿por qué es una norma?*). Si a $\mathcal{S}$ lo dotamos de la métrica inducida por $||\cdot||$, muestre que:

   a) $c_0^\circ = \phi$.

   b) $\overline{c_0} = \mathcal{S}$. Concluya que los subespacios vectoriales no siempre son cerrados.

6. Sea $\mathcal{C}([0,1],[0,1])$ el espacio de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ con la métrica del supremo. Demuestre que el subconjunto de homeomorfismos de $[0,1]$ en $[0,1]$ tiene interior vacío en $\mathcal{C}([0,1],[0,1])$.