Universidad de Chile

Facultad de Ciencias

Análisis real | Ayudantía 4

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

---

1. Se puede demostrar que los únicos conjuntos abiertos y cerrados en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ son $\mathbb{R}$ y ϕ. [1]. Sea una función $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{01})$, donde d_{01} es la métrica discreta. Demuestre que f es continua, si y sólo si, es constante.

   Respuesta: Si f es constante, digamos $f(x) = y_0$, entonces, dado $\epsilon > 0$ y $z \in \mathbb{R}$, podemos tomar $\delta = 1 > 0$ tal que, si $|x - z| < \delta = 1$ (sirve cualquier $\delta > 0$), entonces $d_{01}(f(x), f(z)) = d_{01}(y_0, y_0) = 0 < \epsilon$.
   Se tiene que f es continua en $z \in \mathbb{R}$.

   Por otro lado, supongamos que f es continua. Note que $\{f(0)\}$ es un conjunto cerrado en $(\mathbb{R}, d_{01})$ por ser un singleton, y también es abierto, ya que todos los conjuntos en un espacio métrico discreto lo son (de hecho, todos también son cerrados, independiente de su cardinalidad). Dado que f es continua, se tiene que $f^{-1}(\{f(0)\})$ es abierto y cerrado en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
   Por tanto, $f^{-1}(\{f(0)\}) = \phi$ o $f^{-1}(\{f(0)\}) = \mathbb{R}$. Pero la primera opción no es posible, ya que $0 \in f^{-1}(\{f(0)\})$. Así, $f^{-1}(\{f(0)\}) = \mathbb{R}$, lo cual es equivalente a que, $f(x) = f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. *a*) Sea (X, d) un espacio métrico. Si $S \subset X$, demuestre que $\partial S^\circ \subset \partial S$.

   b) ¿Se puede decir que la frontera preserva contenciones?. Es decir, ¿si $A \subset B$, entonces $\partial A \subset \partial B$?

   Respuesta: Para *a*), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\partial S^\circ &= \overline{S^\circ} \cap \overline{(S^\circ)^c} \\
&\subset \overline{S} \cap \overline{\overline{S^c}} \\
&= \overline{S} \cap \overline{S^c} \\
&= \partial S
\end{aligned}$$

   Para *b*), es sencillo comprobar que en general es falso. Basta considerar $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $A = (0, 1)$ y $B = (0, 2)$.

[1] Revise Teorema 2,47 en el libro *Principles of mathematical analysis* de W. Rudin.

3. Dada una función continua $f\colon (X,d) \to (Y,\lambda)$. Si $O \subset Y$ verifica $O \in \mathcal{G}_\delta$ entonces $f^{-1}(O) \subset X$ verifica $f^{-1}(O) \in \mathcal{G}_\delta$.

   Respuesta: Sea O un conjunto del tipo $\mathcal{G}_\delta$ en Y. Es decir, existe una colección $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos en Y tal que

$$O = \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$$

   Entonces,

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(O_n) \end{aligned}$$

   Pero como f es continua, se tiene que $f^{-1}(O_n)$ es abierto en X, para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $f^{-1}(O)$ es un conjunto del tipo $\mathcal{G}_\delta$ en X.

4. Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial normado y H un subespacio vectorial no trivial de V. Muestre que:

   a) $H^\circ = \phi$.
   b) Si V tiene dimensión finita, entonces $\overline{H} = H$, esto es, H es cerrado.
   c) Con V de dimensión finita, muestre que $\overline{H}^\circ = \phi$.
   d) Sea $\mathcal{BC}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la norma del supremo. Demuestre que $\mathcal{C}_w = \{f \in \mathcal{BC}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x+w) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ tiene interior vacío.
   e) Sea $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de polinomios de grado n y con coeficientes reales. Demuestre que $A = \{p(x) \in \mathcal{P}_n : p'(1) = 0\}$ es cerrado.

   Respuesta: Para *a*), lo mostraremos en dos estapas:

   - Mostraremos primero que $0 \notin H^\circ$. Supongamos lo contrario. Es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset H$. Como H no es trivial, podemos tomar $x_0 \in V - H$ (esto es, $x_0 \in H^c$). Luego, $x_0 \neq 0$. Definimos $y := \frac{\delta}{2}\frac{x_0}{||x_0||}$, donde su distancia a 0 es, $||y - 0|| = ||y|| = \frac{\delta}{2} < \delta$, por lo que, $y \in B(0,\delta)$, y por ende, $y \in H$. Pero como H es un subespacio vectorial, el vector $\frac{2\cdot||x_0||}{\delta} y = x_0 \in H$ (ya que H es cerrado bajo multiplicación escalar). Contradicción. Concluimos que $0 \notin H^\circ$.
   - Por contradicción, supongamos que $v \in H^\circ$. Es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B(v,\delta) \subset H$. Se puede probar, por doble contención, que $v + B(0,\delta) := \{v + y : y \in B(0,\delta)\} = B(v,\delta)$ (*¿por qué?*).
     Luego, $v + B(0,\delta) \subset H$. Pero esto implicaría que $B(0,\delta) \subset H$, lo cual nos llevaría a una contradicción por el punto anterior. Para justificar la contención anterior, damos $z \in B(0,\delta)$. Entonces, $z = (v+z) - v \in H$, ya que, $v + z \in B(v,\delta) \subset H$ y $-v \in H$.

   En *b*), sabemos que en dimensión finita, para un subespacio H, existe una función $P_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow H$ tal que $||P_H(x) - x|| \leq ||v - x||$, para cualquier $v \in H$. A la función P_H se le conoce como proyección ortogonal.
   Sea $z \in H^c$. Se puede elegir $r := \frac{1}{2}||P_H(z) - z||$, el cual satisface que, $B(z,r) \subset H^c$. Luego z es un punto interior de H^c. Como z es arbitrario, se tiene que H^c es abierto, y por ende, H es cerrado.

La parte $c)$ es consecuencia de los dos incisos anteriores: $(\overline{H})^\circ = H^\circ = \phi$.

En $d)$, compruebe que $\mathcal{BC}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}-$ espacio vectorial y que $\mathcal{C}_w$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{BC}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Finalmente para $e)$, compruebe que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión finita, y que A es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

5. Sea (X,d) espacio métrico y $A \subset X$.

   a) Si A es denso en X, muestre que $(A^c)^\circ = \phi$.

   b) Si A es denso en X, muestre que $d(x,A) = 0$, para todo $x \in X$.

   Próxima ayudantía.

6. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$.

   a) Si A es abierto en X, muestre que $\partial A = \overline{A} \cap A^c$.

   b) Sea $f\colon (X,d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continua. Considere el conjunto abierto

   $$A := \{x \in X : f(x) > 0\}.$$

   Demuestre que para todo $x \in \partial A$ se verifica $f(x) = 0$.

   Próxima ayudantía.