Universidad de Chile

Facultad de Ciencias

Análisis real | Ayudantía 4

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

---

1. Se puede demostrar que los únicos conjuntos abiertos y cerrados en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ son $\mathbb{R}$ y ϕ. [1]. Sea una función $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{01})$, donde d_{01} es la métrica discreta. Demuestre que f es continua, si y sólo si, es constante.

2. *a)* Sea (X, d) un espacio métrico. Si $S \subset X$, demuestre que $\partial S^\circ \subset \partial S$.
   b) ¿Se puede decir que la frontera preserva contenciones?. Es decir, ¿si $A \subset B$, entonces $\partial A \subset \partial B$?

3. Dada una función continua $f\colon (X, d) \to (Y, \lambda)$. Si $O \subset Y$ verifica $O \in \mathcal{G}_\delta$ entonces $f^{-1}(O) \subset X$ verifica $f^{-1}(O) \in \mathcal{G}_\delta$.

4. Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial normado y H un subespacio vectorial no trivial de V. Muestre que:
   a) $H^\circ = \phi$.
   b) Si V tiene dimensión finita, entonces $\overline{H} = H$, esto es, H es cerrado.
   c) Con V de dimensión finita, muestre que $\overline{H}^\circ = \phi$.
   d) Sea $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la norma del supremo. Demuestre que $\mathcal{C}_w = \{f \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x + w) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ tiene interior vacío.
   e) Sea $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de polinomios de grado n y con coeficientes reales. Demuestre que $A = \{p(x) \in \mathcal{P}_n : p'(1) = 0\}$ es cerrado.

5. Sea (X, d) espacio métrico y $A \subset X$.
   a) Si A es denso en X, muestre que $(A^c)^\circ = \phi$.
   b) Si A es denso en X, muestre que $d(x, A) = 0$, para todo $x \in X$.

6. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.
   a) Si A es abierto en X, muestre que $\partial A = \overline{A} \cap A^c$.
   b) Sea $f\colon (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continua. Considere el conjunto abierto
   $$A := \{x \in X \colon f(x) > 0\}.$$
   Demuestre que para todo $x \in \partial A$ se verifica $f(x) = 0$.

[1]Revise Teorema 2,47 en el libro *Principles of mathematical analysis* de W. Rudin.