



Universidad de Chile

Facultad de Ciencias

Análisis real | Ayudantía 3

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

En este documento, la notación $X \cong Y$, significa que existe un homeomorfismo en X e Y .

- 1.- Demuestre que $\mathbb{N} \cong \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, si ambos espacios son visto con la métrica inducida por el valor absoluto de $\mathbb{R}$. Concluya que A debe ser discreto, y que los homeomorfismos no preservan distancias.

Respuesta: Debemos encontrar una homeomorfismo entre ambos espacios. Consideremos la asignación natural entre los dos conjuntos: $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ dada por $\phi(n) = \frac{1}{n}$. Es claro que es biyectiva.

Sabemos que $\mathbb{N}$ con la métrica inducida por el valor absoluto, es un espacio métrico discreto. Luego, ϕ es continua, pues su dominio es discreto.

Nos faltaría mostrar que ϕ^{-1} , definida por $\phi^{-1}(\frac{1}{m}) = m$ es continua. Sea $\frac{1}{m_0} \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $\epsilon > 0$.

Tomamos $\delta = \min\{\frac{1}{2m_0}, \frac{\epsilon}{2m_0^2}\} > 0$. Luego, si $|\frac{1}{m} - \frac{1}{m_0}| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{m_0} \right| < \frac{1}{2m_0} \implies m < 2m_0$$

Así,

$$|m - m_0| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{m_0} \right| \cdot mm_0 < \delta \cdot 2m_0^2 < \frac{\epsilon}{2m_0^2} \cdot 2m_0^2 = \epsilon$$

Los homeomorfismos preservan puntos aislados, y por ende, como N está compuesto completamente por puntos aislados, implica que $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto.

A diferencia de las isometría, los homeomorfismos no preservan distancia. Lo anterior constituye un ejemplo de esto. Los espacios son homeomorfos, a pesar que $\mathbb{N}$ no es acotado y $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ sí lo es.

- 2.- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Demuestre que $\text{Gra}(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \cong X$. Use lo anterior para mostrar que la hipérbola $\{(x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\})^2 : xy = 1\} \cong \mathbb{R} - \{0\}$.

Respuesta: Definimos la función $\phi : X \longrightarrow \text{Gra}(f)$ dada por $\phi(x) = (x, f(x))$.

- ϕ es inyectiva, pues si $\phi(x) = \phi(y)$, implica que $(x, f(x)) = (y, f(y))$. Es decir, $x = y$. Además es epiyectiva por definición. Por lo tanto, es biyectiva.

- ϕ es continua, sí y solo sí, las funciones coordenadas son continuas, es decir, si las funciones $x \rightarrow x$ y $x \rightarrow f(x)$ son continuas. En efecto, lo son; la primera porque es la identidad de (X, d) en sí mismo (se puede elegir $\delta = \epsilon$), y la segunda es continua por hipótesis.
- Claramente, $\phi^{-1} : \text{Graf}(X) \rightarrow X$, está definida por $\phi^{-1}(x, f(x)) = x$ es una proyección, y se demostró en clases que estas son continuas.

Con estos 3 puntos, se concluye que f es un homeomorfismo entre X y $\text{Graf}(X)$.

Para el punto siguiente, basta considerar la función $f(x) = \frac{1}{x}$, definida de $\mathbb{R} - \{0\}$ en $\mathbb{R} - \{0\}$. Es continua, si dotamos a $\mathbb{R} - \{0\}$ con la métrica inducida por el valor absoluto. Su gráfico es por definición $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \{(x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\})^2 : y = \frac{1}{x}\}$. Por lo anterior, este espacio dotado de la métrica inducida por la métrica producto, es homeomorfo a $\mathbb{R} - \{0\}$.

3.- Si dos funciones continuas en $\mathbb{R}$ con el valor absoluto coinciden en $\mathbb{Q}$, entonces también coinciden en todo $\mathbb{R}$:

- a) Sean $f, g : M \rightarrow N$ funciones continuas en $a \in M$. Si $f(a) \neq g(a)$, demuestre que existe una bola $A = B(a, r)$ (centrada en a) tal que $f(A) \cap g(A) = \emptyset$.

Respuesta: En clases, se demostró la propiedad de separación en un espacio métrico. En concreto, si $x \neq y$ en un espacio métrico, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.

En el espacio métrico Y , aplicamos esta propiedad con $f(a)$ y $g(a)$. Debe existir $r > 0$ tal que $B(f(a), r) \cap B(g(a), r) = \emptyset$. Como f y g es continua, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que

$$f(B(a, \delta_1)) \subset B(f(a), r)$$

$$g(B(a, \delta_2)) \subset B(g(a), r)$$

Si $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, definimos $A = B(a, \delta)$. En efecto, si $x \in f(A) \cap g(A)$, entonces $x \in f(B(a, \delta_1))$ y $x \in g(B(a, \delta_2))$. Es decir, $x \in B(f(a), r) \cap B(g(a), r) = \emptyset$, lo cual es imposible. Así, $f(A) \cap g(A) = \emptyset$.

- b) Suponga que $M = N = \mathbb{R}$ dotados con el valor absoluto, y suponga que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Demuestre que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Respuesta: Por contradicción, asumimos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Por la parte anterior, existe una bola $B(a, \delta)$ tal que si $x \in B(a, \delta)$ entonces $f(x) \neq g(x)$ (es equivalente a que $f(B(a, \delta)) \cap g(B(a, \delta)) = \emptyset$). Pero como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ ¹, siempre debe existir un racional q tal que $|a - q| < \delta$, es decir, $q \in B(a, \delta)$. Esto es una contradicción, ya que, por hipótesis, $f(q) = g(q)$ y $f(B(a, \delta)) \cap g(B(a, \delta)) = \emptyset$.

4.- Sea $I : (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ dada por

$$I(f)(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

donde d_∞ es la norma del supremo (o máximo en este caso). Muestre que I es $\mathbb{R}$ -lineal, y que es continua en 0. Concluya que debe ser continua en todo el espacio $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}, d_\infty)$.

¹Ver ayudantía anterior.

Respuesta: Sea $f, g \in (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}))$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} I(\lambda f + g)(t) &= \int_0^t (\lambda f(s) + g(s)) ds \\ &= \int_0^t \lambda f(s) ds + \int_0^t g(s) ds \\ &= \lambda \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) ds \\ &= \lambda I(f)(t) + I(g)(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, es lineal. La continuidad es casi directa:

$$\begin{aligned} d(I(f), I(0)) &= \max\{|\int_0^t f(s) ds| : t \in [0, 1]\} \\ &\leq \max\{\int_0^t |f(s)| ds : t \in [0, 1]\} \\ &\leq \max\{\int_0^t d(f, 0) dt : t \in [0, 1]\} \\ &\leq \max\{d(f, 0)t : t \in [0, 1]\} \\ &= d(f, 0) \end{aligned}$$

Así, para $\epsilon > 0$, podemos escoger $\delta = \epsilon > 0$, tal que si $d(f, 0) < \delta = \epsilon$, entonces, $d(I(f), I(0)) < \epsilon$. Como es lineal y continua en 0, tendremos la continuidad en cualquier otro punto.

- 5.- a) Dado un conjunto X no vacío, y dos métricas en él, d_1 y d_2 , ¿es siempre la función identidad $id : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$.
- b) Muestre que $d_1(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ es equivalente al valor absoluto $d_2(x, y) = |x - y|$.

Respuesta: $X = \mathbb{R}$, con $d_1(x, y) = |x - y|$ y $d_2(x, y) = d_{01}(x, y)$ la métrica discreta. Entonces $\{1\}$ es abierto en $(\mathbb{R}, d_{01})$, pero $id^{-1}(\{\pi\}) = \{\pi\}$ no es abierto en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Para la parte b), notamos que $d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$, por lo que $id : (\mathbb{R}, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_1)$ es continua. Nos resta probar la continuidad de $id : (\mathbb{R}, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_1)$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Para $\epsilon > 0$, elegimos $\delta = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} > 0$. Entonces si $d_1(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} < \delta$, entonces $|x - y| < \epsilon$.

- 6.- a) En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, demuestre que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x - 2023)^2 + (y - 2023)^2 < 2023^2\}$ es abierto.
- b) Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal continua en 0. Muestre que el $\text{Ker}T$ es cerrado.
- c) En $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ con la métrica del máximo, muestre que $A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : \sin(f(x)) > |f(x)| + 1\}$ es abierto y cerrado.

Respuesta: Para a), note que $A = B((2023, 2023), 2023)$, y todas las bolas abiertas son conjuntos abiertos.

Para b), vemos que como T es continua en 0 y es lineal, entonces debe ser continua en todo V (teorema visto en clases). Como $\text{Ker}T = T^{-1}(\{0\})$ y $\{0\}$ es cerrado, implica que $\text{Ker}T$ es cerrado, por ser imagen inversa de un cerrado vía una función continua.

Finalmente para c), como $\sin(\theta) \leq 1$, se tiene que $A = \emptyset$, el cual es siempre cerrado y abierto.