**Universidad de Chile**

**Facultad de Ciencias**

**Análisis real | Ayudantía 3**

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

---

En este documento, la notación $X \cong Y$, significa que existe un homeomorfismo en $X$ e $Y$.

1.- Demuestre que $\mathbb{N} \cong \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, si ambos espacios son visto con la métrica inducida por el valor absoluto de $\mathbb{R}$. Concluya que $A$ debe ser discreto, y que los homeomorfismos no preservan distancias.

2.- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Demuestre que $Gra(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \cong X$. Use lo anterior para mostrar que la hipérbola $\{(x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\})^2 : xy = 1\} \cong \mathbb{R} - \{0\}$.

3.- *Si dos funciones continuas en $\mathbb{R}$ con el valor absoluto coinciden en $\mathbb{Q}$, entonces coinciden en todo $\mathbb{R}$:*

*a)* Sean $f, g : M \longrightarrow N$ funciones continuas en $a \in M$. Si $f(a) \neq g(a)$, demuestre que existe una bola $A = B(a, r)$ (centrada en $a$) tal que $f(A) \cap g(A) = \phi$.

*b)* Suponga que $M = N = \mathbb{R}$ dotados con el valor absoluto, y suponga que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Demuestre que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

4.- Sea $I : (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ dada por

$$I(f)(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

donde $d_\infty$ es la norma del supremo (o máximo en este caso). Muestre que $I$ es $\mathbb{R}$ - lineal, y que es continua en 0. Concluya que debe ser continua en todo el espacio $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$.

5.- *a)* Dado un conjunto $X$ no vacio, y dos métricas en él, $d_1$ y $d_2$, ¿es siempre la función identidad $id : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ continua?.

*b)* Muestre que $d(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ es equivalente al valor absoluto.

6.- *a)* En $(\mathbb{R}^2, || \cdot ||_2)$, demuestre que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x - 2023)^2 + (y - 2023)^2 < 2023^2\}$ es abierto.

*b)* Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal continua en 0. Muestre que el $KerT$ es cerrado.

*c)* En $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ con la métrica del máximo, muestre que $A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : \sin(f(x)) > |f(x)| + 1\}$ es abierto y cerrado.